

Platónská tělesa

(projekt)

Zpracoval: Oliver Vydra

Ročník: Septima 2018/2019

Zadala: RNDr. Jana Pikousová Doležalová

Konzultant: Ing. Pavel Vydra

Datum odevzdání: 26. 9. 2018

Obsah

Obsah.....	2
Úvod	3
1 Historie.....	4
1.1 Nejstarší nálezy.....	4
1.2 Antické Řecko.....	4
1.3 Antický Řím.....	4
1.4 Johannes Kepler (1571 – 1630)	5
1.5 Leonhard Euler (1707 – 1783).....	5
2 Počet platónských těles	6
2.1 Euklidův důkaz počtu platónských těles.....	6
2.2 Důkaz pomocí Eulerovy věty a rovinného grafu	6
3 Klasifikace platónských těles	9
3.1 Pravidelný tetraedr – čtyřstěn	9
3.2 Pravidelný hexaedr – šestistěn.....	12
3.3 Pravidelný oktaedr – osmistěn.....	13
3.4 Pravidelný dodekaedr – dvanáctistěn	15
3.5 Pravidelný ikosaedr – dvacetistěn.....	19
4 Dualita platónských těles	21
5 Platónská tělesa kolem nás.....	22
5.1 Organismy.....	22
5.2 Chemie a fyzika	22
5.3 Architektura, umění, móda	23
5.4 Hry	23
Vytvoření 3D modelů	24
Závěr.....	25
Zdroje	26
Přílohy	29

Úvod

Platónská tělesa jsou zajímavou problematikou, která je ale na středních školách často přehlížena. Přitom tu jsou již odedávna a jsou všude kolem nás. Cílem této práce je přiblížit tato tělesa středoškolským studentům, ukázat, jak byla vnímána v historii a kde všude je lze najít kolem nás. Dále je cílem práce předvedení, že objemy a povrchy těchto těles jsou v silách středoškolských studentů. Součástí práce je tedy odvození vzorečků pro povrch a objem těles, za použití převážně středoškolského učiva. V poslední kapitole je popis vytvoření 3D modelů platónských těles, která jsou také součástí této práce.

1 Historie

Pravidelné mnohostěny neboli polyedry¹ byly známy již dávno ve starověku, a od té doby jim je připisován velký význam, jak náboženský (pět elementů), tak v dnešní době i přírodní (struktury molekul).

1.1 Nejstarší nálezy

Nejstarší pravidelné mnohostěny byly objeveny ve Skotsku, kde byla nalezena tělesa vytesaná z kamene, která připomínají platónská tělesa (obrázky 1, 2). Některá mají dokonce čáry, které naznačují hrany pravidelných mnohostěnů. Jejich stáří se odhaduje na 2000 let př. n. l. (Pavlovičová, 2014, s.4). To poukazuje na to, že platónská tělesa byla známá dávno před Platónem samotným a že Platón tedy není jejich objevitelem.

1.2 Antické Řecko

Zájem o pravidelné polyedry projevovali hlavně pythagorejci, právě kvůli jejich symetrii, kterou považovali za dokonalost. Do vrcholů magického pentagramu umístili právě těchto pět pravidelných mnohostěnů a do středu vesmír (Pavlovičová, 2014, s.4) (obrázek 3).

Platón popsal pravidelné mnohostěny ve svém díle *Tímaios*, kde jim také přiřadil pět elementů. Čtyřstěn – oheň, krychle – země, osmistěn – vzduch, dvacetistěn – voda a dvanáctistěn – vše, co existuje (Pavlovičová, 2014, s.5) (obrázek 4).

1.3 Antický Řím

Velkou záhadou pro vědce je římský dodekaedr, tedy dutý dvanáctistěn, který se našel na mnoha vykopávkách sídel Římské říše a většinou je datován do období 1. – 4. století n. l. Na každý vrchol je přidělena kulička, a každá stěna má v sobě různě velký kruhový otvor (obrázek 5). Podle počtu nálezů to byl běžný předmět, avšak nikomu se zatím nepodařilo dokázat účel těchto objektů. Jsou známy různé teorie použití: svícny, měřicí přístroje, dětské hračky, náboženské předměty apod. (Rodionov, 2015).

¹ Z řeckého „πολύς“, *polys* – mnoho a „ἑδρα“ *hedra* - stěna (polyhedron, 2017).

1.4 Johannes Kepler (1571 – 1630)

Také pro Keplera byla platónská tělesa důležitá. V té době bylo známých šest planet sluneční soustavy a ty dle jeho výzkumu obíhaly Slunce po kulových plochách vepsaných či opsaných pravidelným mnohostěnům. Země například obíhala po kulové ploše vepsané dvanáctistěnu a Mars po opsané kulové ploše dvanáctistěnu. Avšak při zjištění, že vzdálenosti kulových ploch neodpovídají skutečným vzdálenostem od Slunce, Keplerova teorie neobstála (OPAVA, 1989, s. 291) (obrázky 6, 7).

1.5 Leonhard Euler (1707 – 1783)

Euler formuloval vztah o počtu stěn, hran a vrcholů, platící pro všechny konvexní mnohostěny. Tento vztah je také známý jako Eulerova věta. Pokud se sečte počet stěn s a počet vrcholů v a odečte se počet hran h , výsledek je roven dvěma. Symbolický zápis vypadá následovně (Pavlovičová, 2014, s.6):

$$s + v - h = 2 \quad [1]$$

Eulerovu větu lze jednoduše vyzkoušet, a to dosazením příslušných hodnot. Například krychle má 6 stěn, 8 vrcholů a 12 hran, po dosazení:

$$6 + 8 - 12 = 2 \quad [2]$$

$$14 - 12 = 2 \quad [3]$$

$$2 = 2 \quad [4]$$

2 Počet platónských těles

Platónské těleso je konvexní² pravidelný polyedr, tedy má shodné stěny (pravidelné mnohoúhelníky), shodné délky hrany a shodný počet stěn sbíhajících se v jednom vrcholu. Tyto podmínky splňuje pouze pět těles, a to těch platónských (Sutton, 2015, s. 144). Proč je tomu tak?

2.1 Euklidův důkaz počtu platónských těles

Prostorový úhel potřebuje ke svému vymezení alespoň tři mnohoúhelníky. Pokud ale bude celkový úhel u vrcholů mnohoúhelníků roven nebo větší 360° , nebude možné prostorový úhel sestrojit, neboť mnohoúhelníky budou v rovině, případně se budou v rovině překrývat. V případě rovnostranných trojúhelníků (úhel u vrcholu 60°) je tedy možné vytvořit prostorový úhel ze tří (celkový úhel 180°), čtyř (celkový úhel 240°) a pěti (celkový úhel 300°) trojúhelníků. Pokud by jich bylo šest, celkový úhel by byl 360° a tvořili by rovinu. U čtverců (úhel u vrcholu 90°) existuje pouze jedna možnost, a to tři čtverce (celkový úhel 270°), čtyři čtverce (celkový úhel 360°) opět tvoří rovinu. Z pětiúhelníků (úhel u vrcholu 108°) lze také vytvořit jen jeden prostorový úhel, též ze tří (celkový úhel 324°), čtyři by se už v rovině překrývali. Tři šestiúhelníky (úhel u vrcholu 120°) budou mít celkový úhel 360° a trojice jakéhokoliv dalšího n -úhelníku bude mít celkový úhel větší než 360° a budou se tedy překrývat (Sutton, 2015, s. 144) (obrázek 8).

Z toho vyplývá, že lze sestrojit pouze pět těles s těmito pěti prostorovými úhly, tedy pět platónských těles. Tento důkaz uvedl Euklides ve 13. knize svých *Základů* (Sutton, 2015, s. 144).

2.2 Důkaz pomocí Eulerovy věty a rovinného grafu

Pomocí rovinného grafu (který přesahuje středoškolské učivo a proto zde není uveden postup) (Doležalová, 2010, s. 11) je možno získat rovnost:

$$2h = ns = pv \quad [5]$$

kde h je počet hran mnohostěnu, s počet stěn, v počet vrcholů, n počet hran jedné stěny a p je počet hran u jednoho vrcholu. Nyní, dosazením do Eulerovy věty

² Množina bodů je konvexní, jestliže úsečka spojující dva libovolné body obsažené v této množině je také obsažená v této množině. (Surynková) (obrázek 9).

$$v - h + s = 2 \quad [6]$$

se postupně vyjádří hledaná v , s a h :

v :

$$v - \frac{pv}{2} + \frac{pv}{n} = 2 \quad [7]$$

$$2nv - npv + 2pv = 4n \quad [8]$$

$$v \cdot (2n - np + 2p) = 4n \quad [9]$$

$$v = \frac{4n}{2n - np + 2p} \quad [10]$$

h :

$$\frac{2h}{p} - h + \frac{2h}{n} = 2 \quad [11]$$

$$2nh - np h + 2ph = 2np \quad [12]$$

$$h \cdot (2n - np + 2p) = 2np \quad [13]$$

$$h = \frac{2np}{2n - np + 2p} \quad [14]$$

s :

$$\frac{ns}{p} - \frac{ns}{2} + s = 2 \quad [15]$$

$$2ns - nps + 2ps = 4p \quad [16]$$

$$s \cdot (2n - np + 2p) = 4p \quad [17]$$

$$s = \frac{4p}{2n - np + 2p} \quad [18]$$

Protože se jedná o přirozená čísla ($v, h, s, n, p \in \mathbb{N}$) a jmenovatel ve zlomku nesmí být roven 0, vyplýne z těchto podmínek nerovnice:

$$2n - np + 2p > 0 \quad [19]$$

Také známé pod jiným zápisem:

$$2(n + p) - np > 0 \quad [20]$$

Dále, pro konvexní mnohostěn platí, že $n, p \geq 3$. Například pro $n = 3$:

$$2 \cdot 3 - 3p + 2p > 0 \quad [21]$$

$$6 - p > 0 \quad [22]$$

$$\mathbf{6 > p} \quad [23]$$

Ale zároveň platí $p \geq 3$, tedy $p \in \{3; 4; 5\}$. A například pro $n = 7$:

$$2 \cdot 7 - 7p + 2p > 0 \quad [24]$$

$$14 - 5p > 0 \quad [25]$$

$$\mathbf{\frac{14}{5} > p} \quad [26]$$

Ale $14/5 < 3$, tedy nemůže platit podmínka $p \geq 3$. To platí pro všechna $n, p \geq 6$. Tato nerovnost proto platí pouze pro pět možných dvojic: (3; 3) – čtyřstěn, (4; 3) – šestistěn, (3; 4) – osmistěn, (5; 3) – dvanáctistěn a (3; 5) – dvacetistěn. (Doležalová, 2010, s. 12).

3 Klasifikace platónských těles

Tato práce se nezabývá vepsanými a opsanými kulovými plochami, neboť přesahuje úroveň středoškolského učiva. Pouze poloměry kulových ploch vepsaných (r_o) dvanáctistěnu a dvacetistěnu jsou použity ve výpočtech objemů těchto těles. Jsou použity vzorce (Koutná, 2008):

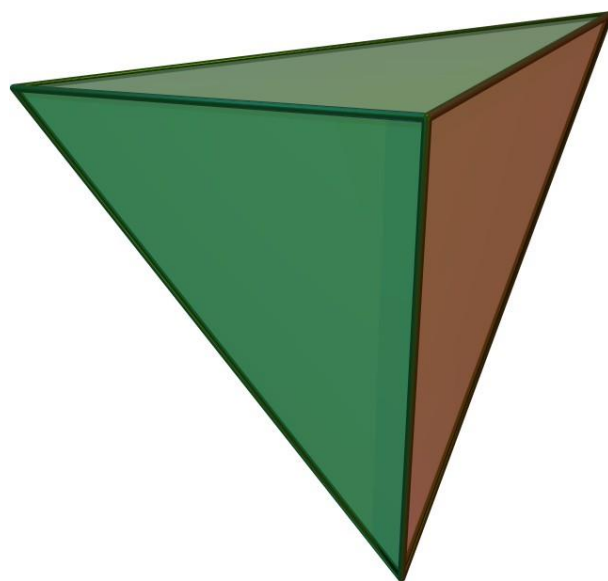
$$r_{\text{dvanáctistěn}} = \frac{a \cdot \sqrt{10(25 + 11\sqrt{5})}}{20} \quad [27]$$

$$r_{\text{dvacetistěn}} = \frac{a\sqrt{3}(3 + \sqrt{5})}{20} \quad [28]$$

3.1 Pravidelný tetraedr – čtyřstěn

Tabulka 1: Tetraedr

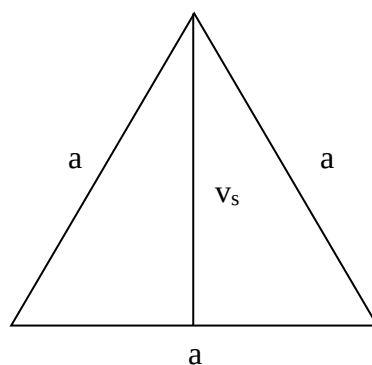
Tetraedr	
Stěna	<i>trojúhelník</i>
Počet vrcholů (v)	4
Počet stěn (s)	4
Počet hran (h)	6
Počet hran jedné stěny (n)	3
Počet hran u jednoho vrcholu (p)	3
Povrch (S)	$S = \sqrt{3}a^2$
Objem (V)	$V = \frac{\sqrt{2}a^3}{12}$



Ilustrace 1: Tetraedr

Povrch čtyřstěnu se spočítá jako součet obsahů jeho čtyř stěn (obrázek 29). Obsah rovnostranného trojúhelníka se spočítá pomocí strany a výšky (ilustrace 2), tu lze spočítat přes Pythagorovu větu:

$$c^2 = a^2 + b^2 \quad [29]$$



Ilustrace 2: Výška v rovnostranném trojúhelníku

A po dosazení:

$$v_s^2 = a^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2 \quad [30]$$

$$v_s^2 = a^2 - \frac{a^2}{4} \quad [31]$$

$$v_s^2 = \frac{4a^2 - a^2}{4} \quad [32]$$

$$v_s = \frac{\sqrt{3}a}{2} \quad [33]$$

Nyní lze spočítat obsah trojúhelníka (P):

$$P = \frac{a \cdot v_s}{2} \quad [34]$$

$$P = \frac{a \frac{\sqrt{3}a}{2}}{2} \quad [35]$$

$$P = \frac{\sqrt{3}a^2}{4} \quad [36]$$

Tedy povrch tetraedru:

$$S = 4P \quad [37]$$

$$S = 4 \frac{\sqrt{3}a^2}{4} \quad [38]$$

$$S = \sqrt{3}a^2 \quad [39]$$

Objem čtyřstěnu (tedy jehlanu) se spočítá jako jedna třetina objemu hranolu o stejné podstavě a tělesové výšce³. Tělesovou výšku lze spočítat pomocí Pythagorovy věty [29] v pravoúhlém trojúhelníku, ve kterém je strana a přepona, tělesová výška (v_t) jedna odvěsna a dvě třetiny stěnové výšky [33] druhá odvěsna. Dvě třetiny proto, že stěnová výška je dělena těžištěm na dvě části v poměru 1:2, a ta delší část je ta u vrcholu. Tedy dvě třetiny v_t :

$$\frac{2}{3}v_s = \frac{2}{3} \frac{\sqrt{3}a}{2} \quad [40]$$

$$\frac{2}{3}v_s = \frac{\sqrt{3}a}{3} \quad [41]$$

Nyní lze spočítat tělesovou výšku:

$$v_t^2 = a^2 - \left(\frac{\sqrt{3}a}{3}\right)^2 \quad [42]$$

$$v_t^2 = a^2 - \frac{3a^2}{9} \quad [43]$$

$$v_t^2 = \frac{9a^2 - 3a^2}{9} \quad [44]$$

$$v_t^2 = \frac{6a^2}{9} = \frac{2a^2}{3} \quad [45]$$

$$v_t = \sqrt{\frac{2}{3}}a \quad [46]$$

A výpočet objemu pak vypadá takto:

$$V = \frac{1}{3} \cdot P \cdot v_t \quad [47]$$

$$V = \frac{1}{3} \frac{\sqrt{3}a^2}{4} \sqrt{\frac{2}{3}}a \quad [48]$$

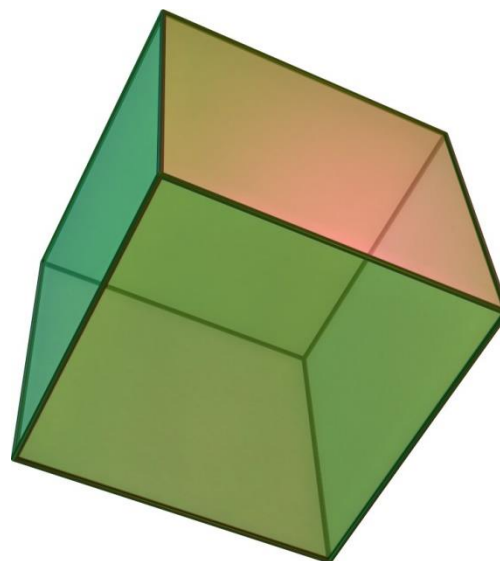
$$V = \frac{\sqrt{2}a^3}{12} \quad [49]$$

³ Tuto vlastnost popsal Euklides ve 12. knize svých Základů: libovolný hranol s mnohoúhelníkovou podstavou lze rozdělit na tři jehlany se stejnou mnohoúhelníkovou podstavou, stejnou výškou a stejným objemem.(Horák) (obrázek 10).

3.2 Pravidelný hexaedr – šestistěn

Tabulka 2: Hexaedr

Hexaedr (krychle)	
Stěna	<i>čtverec</i>
Počet vrcholů (v)	8
Počet stěn (s)	6
Počet hran (h)	12
Počet hran jedné stěny (n)	4
Počet hran u jednoho vrcholu (p)	3
Povrch (S)	$S = 6a^2$
Objem (V)	$V = a^3$



Ilustrace 3: Hexaedr

Povrch krychle lze spočítat velmi snadno, neboť jejích šest stěn (obrázek 30) je tvořeno čtverci a obsah čtverce se rovná druhé mocnině strany:

$$P = a^2 \quad [50]$$

$$S = 6P \quad [51]$$

$$S = 6a^2 \quad [52]$$

Objem šestistěnu je také snadný, protože strana se rovná výšce:

$$V = P \cdot a \quad [53]$$

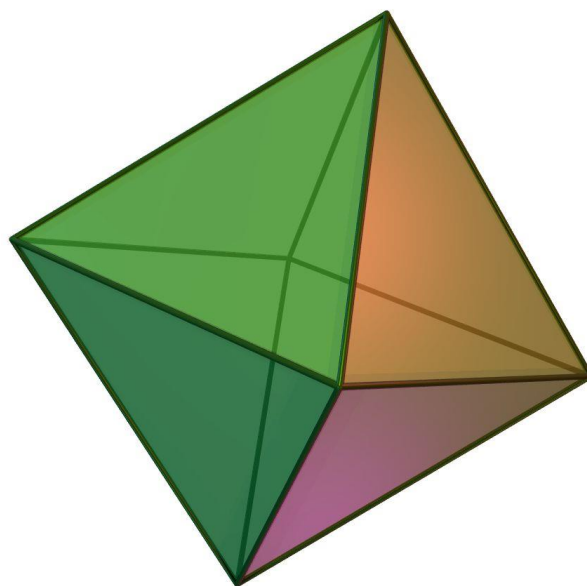
$$V = a^2 \cdot a \quad [54]$$

$$V = a^3 \quad [55]$$

3.3 Pravidelný oktaedr – osmistěn

Tabulka 3: Oktaedr

Oktaedr	
Stěna	<i>trojúhelník</i>
Počet vrcholů (v)	6
Počet stěn (s)	8
Počet hran (h)	12
Počet hran jedné stěny (n)	3
Počet hran u jednoho vrcholu (p)	4
Povrch (S)	$S = 2\sqrt{3}a^2$
Objem (V)	$V = \frac{\sqrt{2}a^3}{3}$



Ilustrace 4: Oktaedr

Povrch oktaedru je roven součtu obsahů jeho osmi trojúhelníkových stěn (obrázek 31) [36], také je dvakrát větší než povrch čtyřstěnu [39].

$$P = \frac{\sqrt{3}a^2}{4} \quad [56]$$

$$S = 8P \quad [57]$$

$$S = 8 \frac{\sqrt{3}a^2}{4} \quad [58]$$

$$S = 2\sqrt{3}a^2 \quad [59]$$

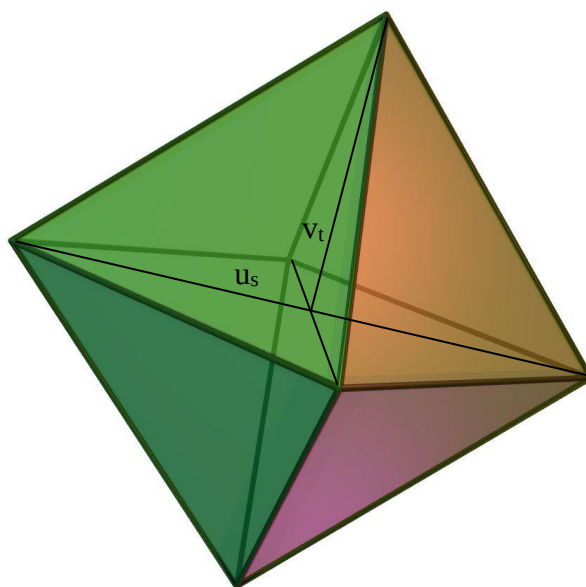
Objem osmistěnu lze spočítat jako objem dvou shodných jehlanů (V_j) se čtvercovou podstavou. Výška jednoho jehlanu (v_t) je rovna polovině úhlopříčky tohoto čtverce (také je to poloměr kulové plochy opsané). Úhlopříčka (u_s) (ilustrace 5) se vypočítá přes Pythagorovu větu [29]:

$$u_s^2 = a^2 + a^2 \quad [60]$$

$$u_s = \sqrt{2a^2} \quad [61]$$

$$v_t = \frac{u_s}{2} \quad [62]$$

$$v_t = \frac{\sqrt{2}a}{2} \quad [63]$$



Ilustrace 5: Úhlopříčky v osmistěnu

Objem jednoho jehlanu je roven jedné třetině součinu obsahu podstavy a výšky:

$$V_j = \frac{1}{3} \cdot S_p \cdot v_t \quad [64]$$

$$V_j = \frac{1}{3} a^2 \frac{\sqrt{2}a}{2} \quad [65]$$

$$V_j = \frac{\sqrt{2}a^3}{6} \quad [66]$$

Tím pádem objem osmistěnu vypadá takto:

$$V = 2V_j \quad [67]$$

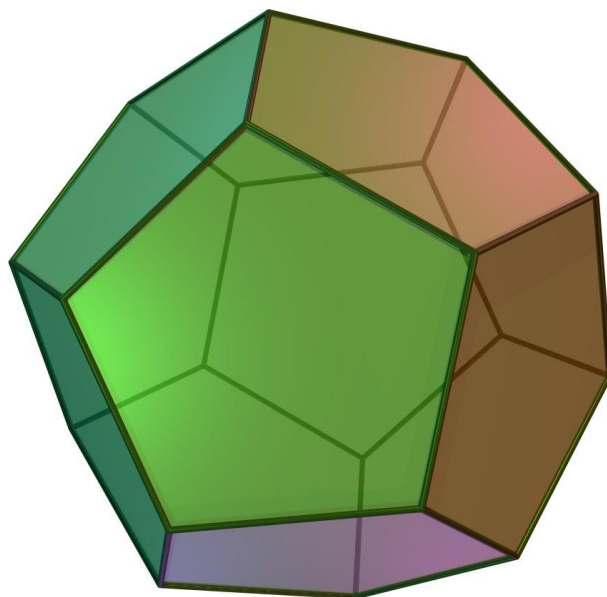
$$V = 2 \frac{\sqrt{2}a^3}{6} \quad [68]$$

$$V = \frac{\sqrt{2}a^3}{3} \quad [69]$$

3.4 Pravidelný dodekaedr – dvanáctistěn

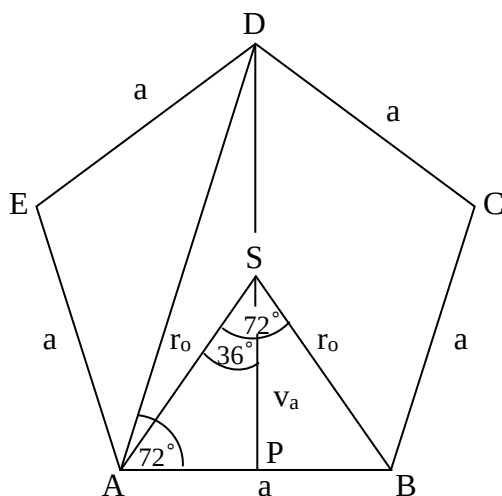
Tabulka 4: Dodekaedr

Oktaedr	
Stěna	<i>pětiúhelník</i>
Počet vrcholů (v)	20
Počet stěn (s)	12
Počet hran (h)	30
Počet hran jedné stěny (n)	5
Počet hran u jednoho vrcholu (p)	3
Povrch (S)	$S = 3a^2 \sqrt{25 + 10\sqrt{5}}$
Objem (V)	$V = \frac{\sqrt{2}a^3}{3}$



Ilustrace 6: Dodekaedr

Povrch dodekaedru se spočítá jako součet obsahů jeho dvanácti stěn (obrázek 32). Ty mají tvar pětiúhelníku. Obsah pětiúhelníku se rovná pěti obsahům rovnoramenného trojúhelníka, jehož základna je strana pětiúhelníku a ramena jsou poloměry kružnice opsané (r_o), které svírají úhel 72° (ilustrace 7).



Ilustrace 7: Úhlopříčka a výška v pětiúhelníku

V pětiúhelníku (ilustrace 7) se poměr úhlopříčky AD a strany AB se rovná hodnotě zlatého řezu φ ($\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$) (Polster, 2014, s. 41). Úhlopříčka u_s (AD) se tedy rovná $\frac{1+\sqrt{5}}{2}a$.

Pomocí toho a trojúhelníku APD lze spočítat $\cos 72^\circ$ (72° je zde proto, že obvodový úhel je DAB je dvakrát menší než příslušný středový úhel DSB, který se rovná rozdílu úhlů DSP a PSB, tedy $180^\circ - 36^\circ = 144^\circ$.):

$$\cos 72^\circ = \frac{\frac{a}{2}}{u_s} \quad [70]$$

$$\cos 72^\circ = \frac{\frac{a}{2}}{\frac{1+\sqrt{5}}{2}a} \quad [71]$$

$$\cos 72^\circ = \frac{a}{2} \frac{2}{a(1+\sqrt{5})} \quad [72]$$

$$\cos 72^\circ = \frac{1}{1+\sqrt{5}} \quad [73]$$

V trojúhelníku ABS (ilustrace 7) platí kosinová věta:

$$a^2 = r_o^2 + r_o^2 - 2 \cdot r_o \cdot r_o \cdot \cos 72^\circ \quad [74]$$

A lze tedy vyjádřit r_o :

$$a^2 = 2r_o^2 - 2r_o^2 \frac{1}{1+\sqrt{5}} \quad [75]$$

$$a^2 = 2r_o^2 \left(1 - \frac{1}{1+\sqrt{5}}\right) \quad [76]$$

$$r_o^2 = \frac{a^2}{2 \left(1 - \frac{1}{1+\sqrt{5}}\right)} \quad [77]$$

$$r_o^2 = \frac{a^2}{2 \left(\frac{\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}}\right)} \quad [78]$$

$$r_o^2 = a^2 \frac{1+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}} \quad [79]$$

$$r_o^2 = a^2 \frac{1+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}} \cdot \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = a^2 \frac{\sqrt{5}+5}{10} \quad [80]$$

$$r_o = \sqrt{\frac{a^2(\sqrt{5} + 5)}{10}} \quad [81]$$

Výška v trojúhelníku ABS se pak vypočítá pomocí Pythagorovy věty [29]:

$$v_a^2 = r_o^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2 \quad [82]$$

$$v_a^2 = \frac{a^2(\sqrt{5} + 5)}{10} - \frac{a^2}{4} \quad [83]$$

$$v_a^2 = \frac{10a^2 + 2a^2\sqrt{5} - 5a^2}{20} \quad [84]$$

$$v_a^2 = \frac{5a^2 + 2a^2\sqrt{5}}{20} \quad [85]$$

$$v_a = \sqrt{\frac{a^2(5 + 2\sqrt{5})}{20}} \quad [86]$$

$$v_a = \sqrt{\frac{a^2}{4}} \sqrt{\frac{(5 + 2\sqrt{5})}{5}} \quad [87]$$

$$v_a = \frac{a}{2} \sqrt{\frac{(5 + 2\sqrt{5})}{5}} \quad [88]$$

Tím pádem obsah pětiúhelníku vypadá takto:

$$P = 5 \cdot \frac{a}{2} \cdot v_a \quad [89]$$

$$P = 5 \cdot \frac{a}{2} \cdot \frac{a}{2} \sqrt{\frac{(5 + 2\sqrt{5})}{5}} \quad [90]$$

$$P = 5 \frac{a^2}{4} \sqrt{\frac{(5 + 2\sqrt{5})}{5}} \quad [91]$$

$$P = \frac{a^2}{4} \sqrt{\frac{25(5 + 2\sqrt{5})}{5}} \quad [92]$$

$$P = \frac{a^2}{4} \sqrt{5(5 + 2\sqrt{5})} \quad [93]$$

$$P = \frac{a^2}{4} \sqrt{25 + 10\sqrt{5}} \quad [94]$$

A tedy povrch celého dvanáctistěnu:

$$S = 12P \quad [95]$$

$$S = 12 \frac{a^2}{4} \sqrt{25 + 10\sqrt{5}} \quad [96]$$

$$\mathbf{S = 3a^2 \sqrt{25 + 10\sqrt{5}}} \quad [97]$$

Objem dvanáctistěnu se skládá z objemů dvanácti jehlanů (V_j) [64], jejichž podstavou je stěna dvanáctistěnu [94] a výškou (v_t) je poloměr kulové plochy opsané (r_o) [27].

$$V_j = \frac{1}{3} \cdot S_p \cdot v_t \quad [98]$$

$$V_j = \frac{1}{3} \frac{a^2}{4} \sqrt{25 + 10\sqrt{5}} a \cdot \frac{\sqrt{10(25 + 11\sqrt{5})}}{20} \quad [99]$$

$$V_j = \frac{a^3}{240} \sqrt{(25 + 10\sqrt{5})10(25 + 11\sqrt{5})} \quad [100]$$

$$V_j = \frac{a^3}{240} \sqrt{11750 + 5250\sqrt{5}} \quad [101]$$

$$V_j = \frac{a^3}{240} \sqrt{25(470 + 210\sqrt{5})} \quad [102]$$

$$V_j = \frac{\sqrt{25}a^3}{240} \sqrt{470 + 210\sqrt{5}} \quad [103]$$

$$V_j = \frac{a^3}{48} \sqrt{225 + 210\sqrt{5} + 245} \quad [104]$$

$$V_j = \frac{a^3}{48} \sqrt{(15 + 7\sqrt{5})^2} \quad [105]$$

$$\mathbf{V_j = \frac{a^3}{48} (15 + 7\sqrt{5})} \quad [106]$$

A nyní objem dvanáctistěnu:

$$V = 12V_j \quad [107]$$

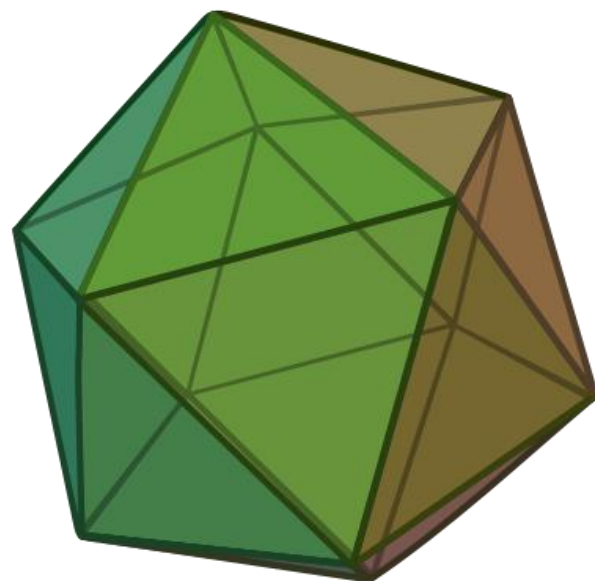
$$V = 12 \frac{a^3}{48} (15 + 7\sqrt{5}) \quad [108]$$

$$\mathbf{V = \frac{a^3}{4} (15 + 7\sqrt{5})} \quad [109]$$

3.5 Pravidelný ikosaedr – dvacetistěn

Tabulka 5: Ikosaedr

Oktaedr	
Stěna	<i>trojúhelník</i>
Počet vrcholů (v)	12
Počet stěn (s)	20
Počet hran (h)	30
Počet hran jedné stěny (n)	3
Počet hran u jednoho vrcholu (p)	5
Povrch (S)	$S = 5a^2\sqrt{3}$
Objem (V)	$V = \frac{5a^3(3 + \sqrt{5})}{12}$



Ilustrace 8: Ikosaedr

Povrch dvacetistěnu se spočítá jako součet obsahů jeho dvaceti stěn (obrázek 33), které mají tvar trojúhelníka [36]:

$$S = 20P \quad [110]$$

$$S = 20 \frac{\sqrt{3}a^2}{4} \quad [111]$$

$$S = 5\sqrt{3}a^2 \quad [112]$$

Objem ikosaedru je roven objemům dvaceti jehlanů [64], jejichž podstavy tvoří stěny ikosaedru [36] a výšky jsou tvořeny poloměrem kulové plochy vepsané [28].

$$V_j = \frac{1}{3} \frac{\sqrt{3}a^2}{4} \frac{a\sqrt{3}(3 + \sqrt{5})}{20} \quad [113]$$

$$V_j = \frac{1}{3} \frac{\sqrt{3}a^2}{4} \frac{a\sqrt{3}(3 + \sqrt{5})}{20} \quad [114]$$

$$V_j = \frac{a^3(3 + \sqrt{5})}{48} \quad [115]$$

Objem dvacetistěnu se tedy vypočítá takto:

$$V = 20V_j \quad [116]$$

$$V = 20 \frac{a^3(3 + \sqrt{5})}{48} \quad [117]$$

$$\mathbf{V} = \frac{\mathbf{5a^3(3 + \sqrt{5})}}{\mathbf{12}} \quad [118]$$

4 Dualita platónských těles

Dvě tělesa jsou k sobě duální, jestliže je lze (při vhodném poměru stran) do sebe vepsat tak, že vrcholy jednoho tělesa leží ve středech stěn druhého tělesa.

Duální tělesa tak mají vždy opačný počet vrcholů a stran, avšak počet hran je stejný. Také mají opačný počet hran jedné strany a hran u jednoho vrcholu. Čtyřstěn je tak duální sám k sobě, krychle je duální k osmistěnu a dvanáctistěn je duální k dvacetistěnu (Csachová, 2012, s. 100) (obrázek 11).

Pokud se duální mnohostěny spojí tak, že se dotýkají středy hran, vzniknou nekonvexní složené mnohostěny (obrázky 12, 13, 14). Platónská tělesa jsou příkladem toho, jak má vše na světě svůj protiklad (Sutton, 2015, s. 146).

5 Platónská tělesa kolem nás

Platónská tělesa se díky své jednoduchosti a symetrii vyskytují všude kolem nás.

5.1 Organismy

Dvacetistěn je častý tvar virů, protože jeho symetrie umožňuje nejnižší energetickou konfiguraci vzájemně působících částic. Mezi takové viry patří například *vir obrny* nebo *vir HIV* (Koutná, 2008, s. 32) (obrázek 15).

Další je *herpes virus* (obrázek 16), jehož virová konstrukce je postavena z identických proteinových jednotek, a ty je nejjednodušší poskládat právě do tvaru ikosaedru. Také ho lze postavit z jediné základní jednotky bílkoviny, opakovaně použité, takže šetří místo v genomu (Koutná, 2008, s. 33).

Další platónská tělesa lze najít u prvků žijících v moři, nazývaných mřížovci (radolaria). Tvar šestistěnu má *Lithocubus geometricus*, tvar osmistěnu má *Circoporus octahedrus*, *Circorhagma dodecahedra* má tvar dvacetistěnu a *Circogonia icosahedra* zase tvar dvacetistěnu (Platonic solid, 2018) (obrázek 17).

5.2 Chemie a fyzika

Mnoho atomů a sloučenin má krystalickou strukturu tvaru pravidelného mnohostěnu. Například kuchyňská sůl (NaCl) má krychlovité krystaly (obrázky 18), metan (CH₄) (obrázek 19) má vodíky ve vrcholcích tetraedru a uhlík je v jeho těžišti (27). Tvar osmistěnu často mívá hexafluorid sírový (SF₆) (obrázek 20), či diamant, který má ale krychlovou strukturu (Koutná, 2008, s. 30) (obrázek 21).

V elektronice se využívá tetraedrů a oktaedrů jako rezistorů. Pokud bude každá hrana čtyřstěnu rezistor s odporem 1 Ω, tak bude odpor mezi dvěma vrcholy 0,5 Ω. Rezistor ve tvaru osmistěnu má pak odpor od 1/2 do 5/12 Ω. (Koutná, 2008, s. 34)

Také mnohé nanočástice mají tvar platónských těles (Pavlovičová, 2014, s. 29) (obrázek 22).

5.3 Architektura, umění, móda

Tvary pravidelných polyedrů, nebo jejich části, se často využívají v umění díky jejich dokonalé symetrii. Například pyramidy mají tvar poloviny osmistěnu, neboť je jednoduchý na vybudování (obrázek 23).

Platónskými tělesy se zabýval i Leonardo da Vinci, který si jejich modely vyráběl ze dřeva, a poté je studoval, když ilustroval knihu matematika Luca Pacioliho *O božském poměru* (*De Divina Proportione*) (obrázek 24).

Salvátor Dalí ve svém *Poslední večeře* využil elementu dvanácti stěnu, tedy toho, že představuje jsoucno. Proto obklopuje Ježíše a apoštoly část dvanáctistěnu (obrázek 25).

Do módy se platónská tělesa dostala díky Amily Hrustic, která je použila ve své diplomové práci *Platos's Collection*. Vytvořila pět černobílých šatů, které ale nejsou určeny pro každodenní nošení, spíše jako kostýmy pro různá představení či přehlídky (Ječmínková, 2011) (obrázek 26).

5.4 Hry

Velmi známá a využívaná herní pomůcka je hrací kostka. Nejvyužívanější je kostka ve tvaru hexaedru, ale v tzv. role-playing hrách⁴ a dalších hrách se využívají kostky všech pěti platónských těles s další desetistěnnou (Dice, 2018) (obrázek 27).

Logickou hrou s platónskými tělesy je Rubikův hlavolam. Ten má zase nejčastěji podobu krychle, ale existuje ve všech pěti polyedrech (Rubic's Cube, 2018) (obrázek 28).

⁴ Role-playing games (hry na hrdiny) jsou hry, ve kterých hráči hrají za fiktivní postavy a za jejichž chování berou odpovědnost. Může se jednat o stolní hry, počítačové a další. (Role-playing game, 2018)

Vytvoření 3D modelů

Součástí této práce jsou 3D modely platónských těles. Byly vytvořeny tetraedr, hexaedr, oktaedr, dodekaedr a ikosaedr v jednotném měřítku a to o hraně dlouhé 10 cm. Dále byl vytvořen jeden dodekaedr o hraně 5 cm. To proto, že dodekaedr o hraně 10 cm je velmi velký, tak aby byl k dispozici také přiměřeně malý dodekaedr.

Tělesa byla nejprve vymodelována v počítačovém programu *Anim8or* (obrázek 34), a poté vytisknuta na 3D tiskárně písku (obrázky 35, 36, 37) v Modelárně Liaz (obrázek 38) v Liberci. Následně byla tělesa natřena epoxidem (obrázek 39), aby ztverdla, a nakonec byla nasprejována v barvách připomínajících elementy přiřazené Platónem (oheň – červená, země – zelená, vzduch – žlutá, voda – modrá a jsooucno – bílá až stříbrná) (obrázek 40).

Závěr

Cílem práce bylo přiblížení platónských těles středoškolským studentům. Bylo ukázáno, jak byla vnímána v historii, a kde všude kolem nás je lze nalézt. Dále bylo v práci předvedeno, že výpočet objemu a povrchu těchto těles je v silách středoškolského studenta a to odvozením těchto vzorečků za použití především středoškolského učiva. Součástí práce jsou také 3D modely platónských těles. V práci se vyskytují ilustrace, které ilustrují aktuální problematiku rovnic a přílohy, které doplňují faktické informace.

Zdroje

CSACHOVÁ, Lucia. *Atlas geometrie: geometrie krásná a užitečná*. Praha: Academia, 2012. ISBN 978-80-200-1575-4

OPAVA, Zdeněk. *Matematika kolem nás*. Praha: Albatros, 1989.

POLSTER, Burkard. *Q. E. D. Krása matematického důkazu*. Praha: Dokořán, 2014. ISBN 978-80-7363-532-9

SUTTON, Daud. Platónská a archimedovská tělesa. In: *Kvadrivium: čtyři svobodná umění: aritmetika, geometrie, hudba a astronomie*. Praha: Dokořán, 2015. ISBN 978-80-7363-732-3.

DOLEŽALOVÁ, Jitka, 2010. *Poloprávidelné rovinné grafy* [online]. Olomouc. Diplomová práce. Univerzita Palackého v Olomouci. Přírodovědecká fakulta. Katedra algebry a geometrie. [Cit. 20. 9. 2018]. Dostupné z: <https://theses.cz/id/0rfsxe/73603-632684086.pdf>

HORÁK, Vítěslav. *Objemy a povrchy těles* [online]. [Cit. 20. 9. 2018]. Dostupné z: <https://docplayer.cz/8197085-3-2-objemy-a-povrchy-teles.html>

JEČMÍNKOVÁ, Eva. *Amila Hrustic navrhla šaty s platónskou geometrií*. In: *Designmag* [online]. 2. 1. 2011 [cit. 22. 9. 2018]. Dostupné z: <http://www.designmag.cz/moda/20247-amila-hrustic-navrhla-saty-s-platonskou-geometrii.html>

KOUTNÁ, Barbora, 2008. *Platónova tělesa* [online]. Olomouc. Středoškolská odborná činnost. Obchodní akademie Olomouc. [Cit. 21. 9. 2018]. Dostupné z: <https://socv2.nidv.cz/archiv31/getWork/hash/8c80397e-7bac-102c-aea7-001e6886262a>

PAVLOVIČOVÁ, Eva, 2014. *Pravidelné mnohostěny a jejich vlastnosti* [online]. Praha. Bakalářská práce. Univerzita Karlova v Praze. Matematicko-fyzikální fakulta. [Cit. 19. 9. 2018]. Dostupné z: https://dspace.cuni.cz/bitstream/handle/20.500.11956/71548/BPTX_2013_1_11320_0_348023_0_141607.pdf?sequence=1

RODINOV, Igor, 2015. *Tajemství římského dodekaedru* [online]. Překlad PAVLÍK, Jan. [Cit. 19. 9. 2018]. Dostupné z: <http://jpavol.sweb.cz/S%20Tajemstv%C3%AD%20%C5%99%C3%ADmsk%C3%A9ho%20dodekedru%20p%C5%99ekl.pdf>

SURYNKOVÁ, Petra. *Konvexní obal a množina* [online]. [Cit. 20. 9. 2018]. Dostupné z: http://surynkova.info/dokumenty/mff/PG/Prednasky/prednaska_8.pdf

Dice. In: *Wikipedia* [online]. 22. 9. 2018 [cit. 23. 9. 2018]. Dostupné z: <https://en.wikipedia.org/wiki/Dice>

Platonic solid. In: *Wikipedia* [online]. 5. 9. 2018 [cit. 21. 9. 2018]. Dostupné z: https://en.wikipedia.org/wiki/Platonic_solid

Polyhedron. In: *Wiktionary* [online]. 9. 11. 2017 [cit. 19. 9. 2018]. Dostupné z: <https://en.wiktionary.org/wiki/polyhedron>

Role-playing game. In: *Wikipedia* [online]. 9. 8. 2018 [cit. 23. 9. 2018]. Dostupné z: https://en.wikipedia.org/wiki/Role-playing_game

Rubik's Cube. In: *Wikipedia* [online]. 21. 9 2018 [cit. 23. 9. 2018]. Dostupné z: https://en.wikipedia.org/wiki/Rubik%27s_Cube

Seznam ilustrací

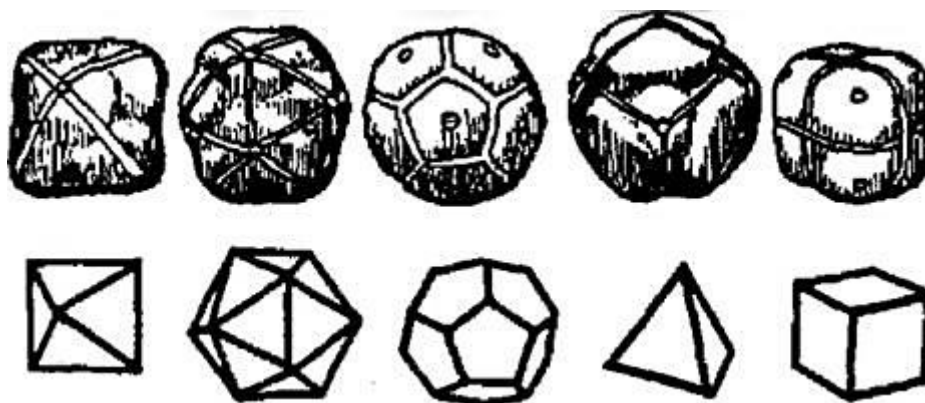
Ilustrace 1: Tetraedr.....	9
Dostupné z: https://en.wikipedia.org/wiki/Tetrahedron#/media/File:Tetrahedron.jpg	
Ilustrace 2: Výška v rovnostranném trojúhelníku.....	10
Zdroj: autor	
Ilustrace 3: Hexaedr.....	12
https://en.wikipedia.org/wiki/Cube#/media/File:Hexahedron.jpg	
Ilustrace 4: Oktaedr	13
Dostupné z: https://en.wikipedia.org/wiki/Octahedron#/media/File:Octahedron.jpg	
Ilustrace 5: Úhlopříčky v osmistěnu.....	14
Zdroj úpravy: autor. Původně dostupné z: https://en.wikipedia.org/wiki/Octahedron#/media/File:Octahedron.jpg	
Ilustrace 6: Dodekaedr.....	15
Dostupné z: https://en.wikipedia.org/wiki/Regular_dodecahedron#/media/File:Dodecahedron.jpg	
Ilustrace 7: Úhlopříčka a výška v pětiúhelníku	15
Zdroj: autor	
Ilustrace 8: Ikosaedr.....	19
Dostupné z: https://en.wikipedia.org/wiki/Regular_icosahedron#/media/File:Icosahedron.jpg	

Přílohy



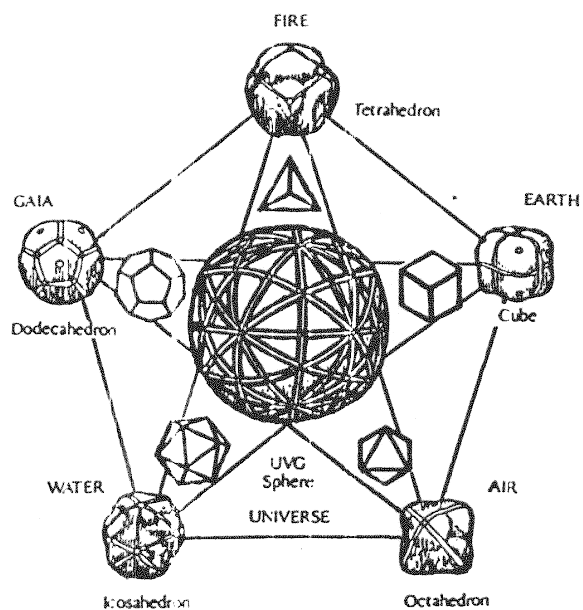
Obrázek 1: Kamenná platónská tělesa,

dostupné z: <http://my-empty-spaces.blog.cz/1308/platonska-telesa>



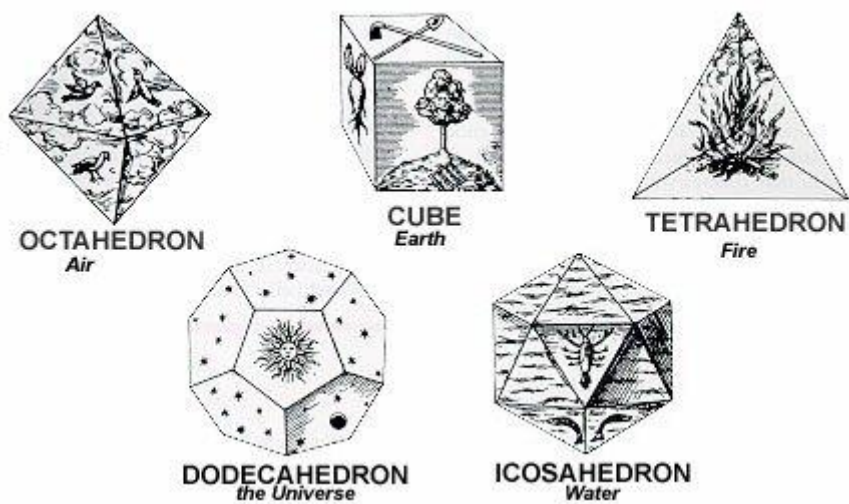
Obrázek 2: Přiřazení kamenů k platónským tělesům,

dostupné z: http://missionignition.net/bethe/rings_of_gaia.php



Obrázek 3: Pythagorejský pentagram,

dostupné z: https://kathleenhalme.com/explore/ancient-drawing-universe/#gal_post_1810_alchemy-vector-6.gif



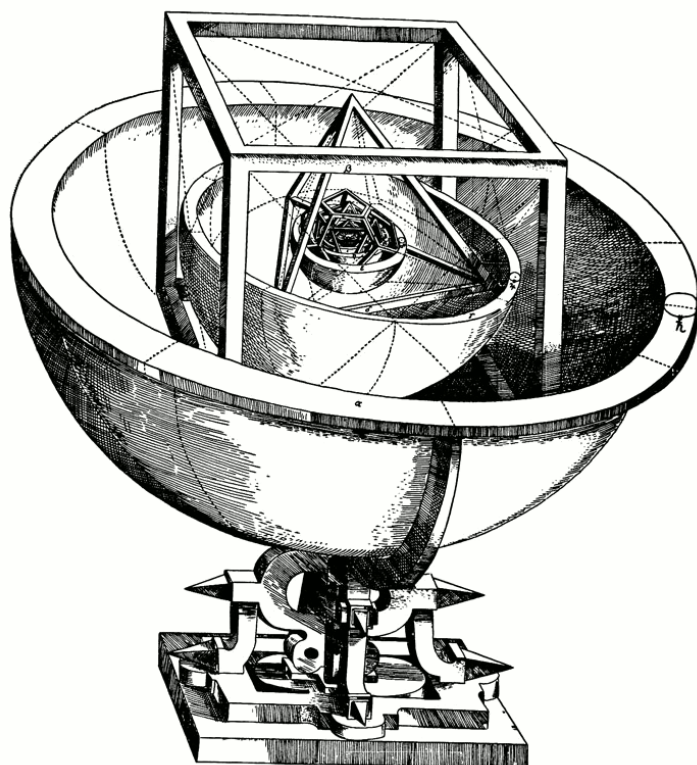
Obrázek 4: Přiřazení platónských těles k elementům,

dostupné z: http://cultured.com/image/3549/The_Platonic_Solids/#.W6fAhGgzaUn

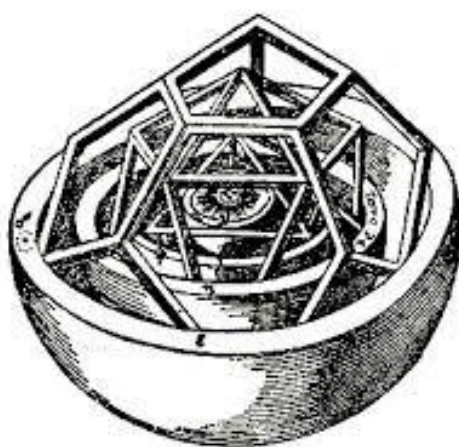


Obrázek 5: Římský dodekaedr,

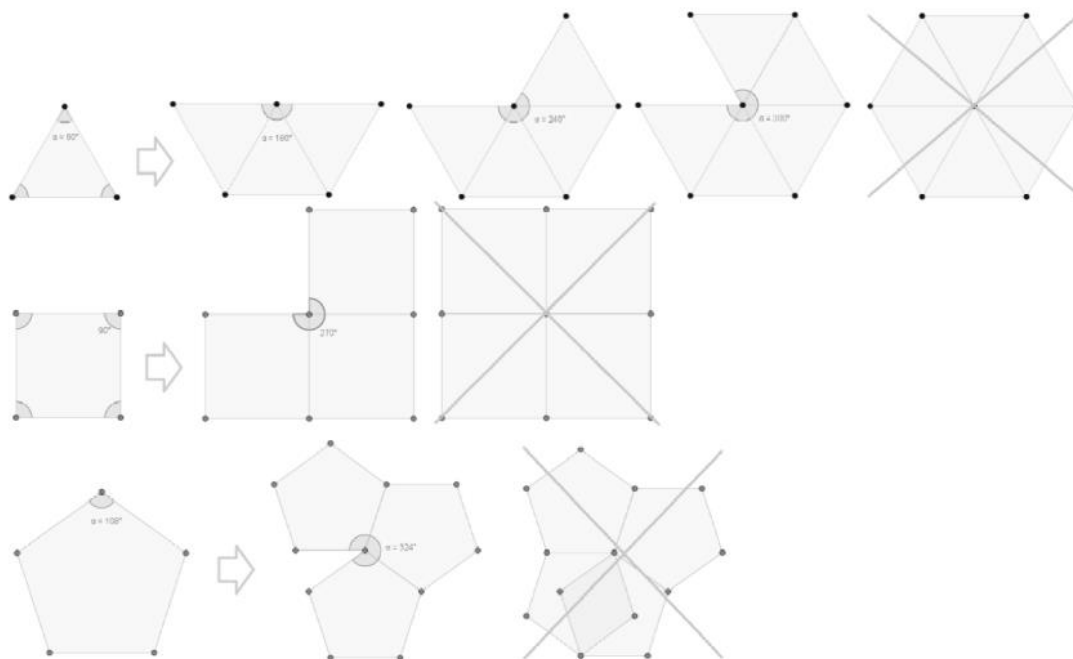
dostupné z: <https://www.suenee.cz/rimsky-dodekaeder-mysteriozni-dvanactisten/>



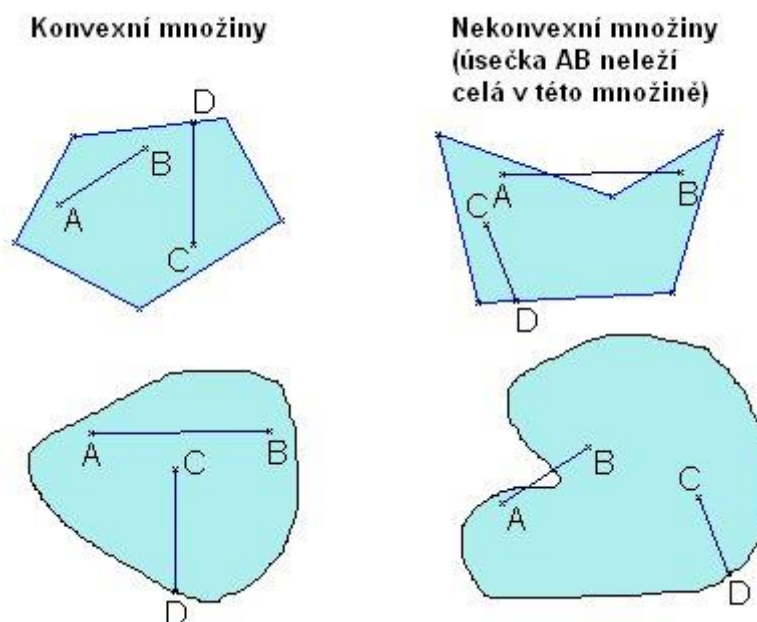
Obrázek 6: Keplerův model vesmíru,
dostupné z: <http://my-empty-spaces.blog.cz/1308/platonska-telesa>



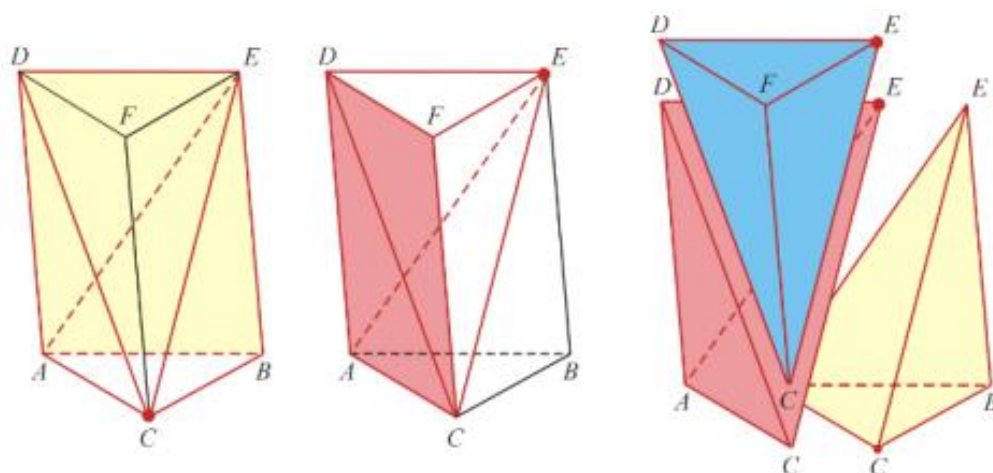
Obrázek 7: Detail Keplerova vesmíru,
dostupné z: <http://my-empty-spaces.blog.cz/1308/platonska-telesa>



Obrázek 8: Důkaz, že pravidelných polyedrů je právě pět,
dostupné z: https://dspace5.zcu.cz/bitstream/11025/24495/1/BP_Knetlova.pdf

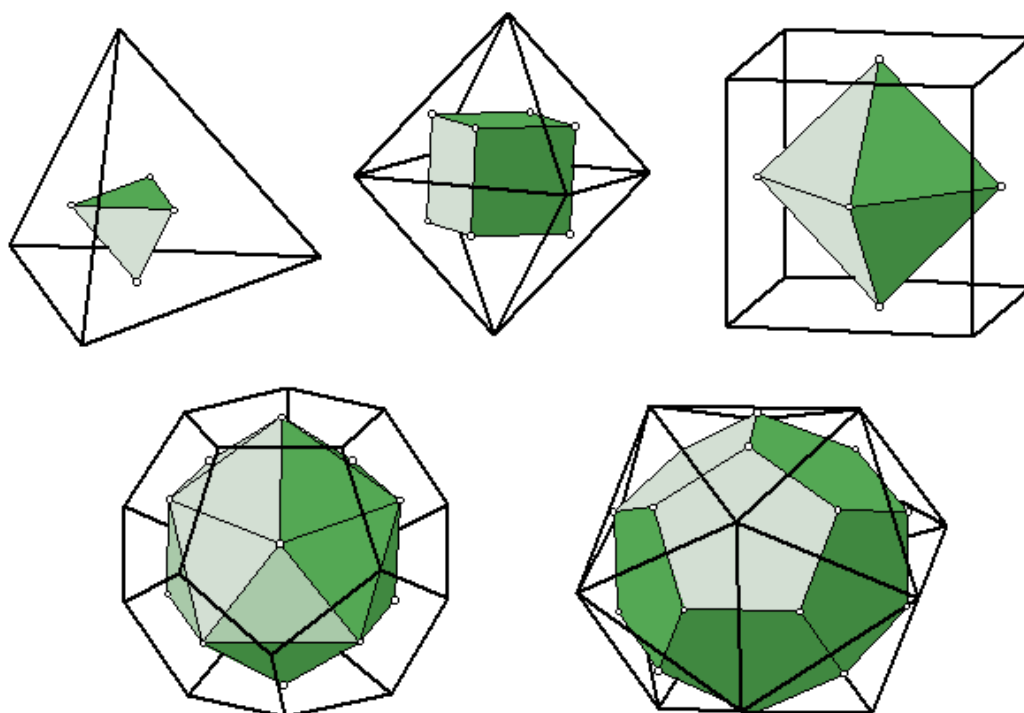


Obrázek 9: Konvexní a nekonvexní množina,
dostupné z: <http://planimetrie.kvalitne.cz/konvexnost.html>



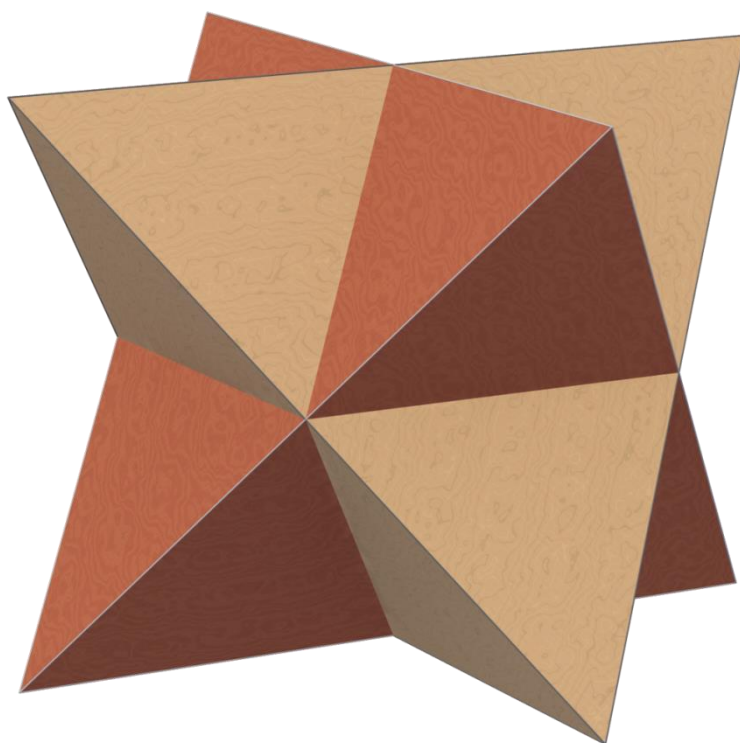
Obrázek 10: Rozdělení hranolu na tři jehlany,

dostupné z: <https://docplayer.cz/8197085-3-2-objemy-a-povrchy-teles.html>

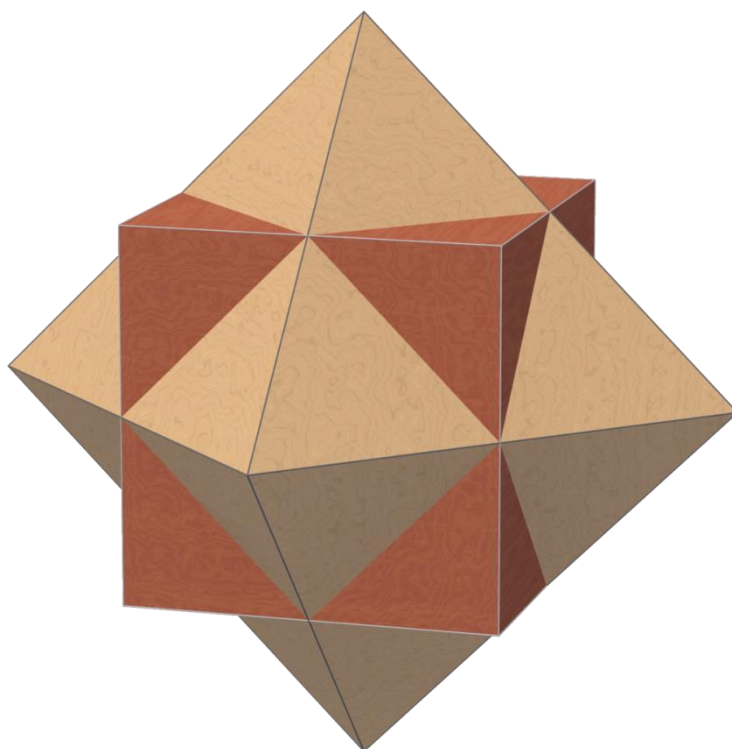


Obrázek 11: Dualita platónských těles,

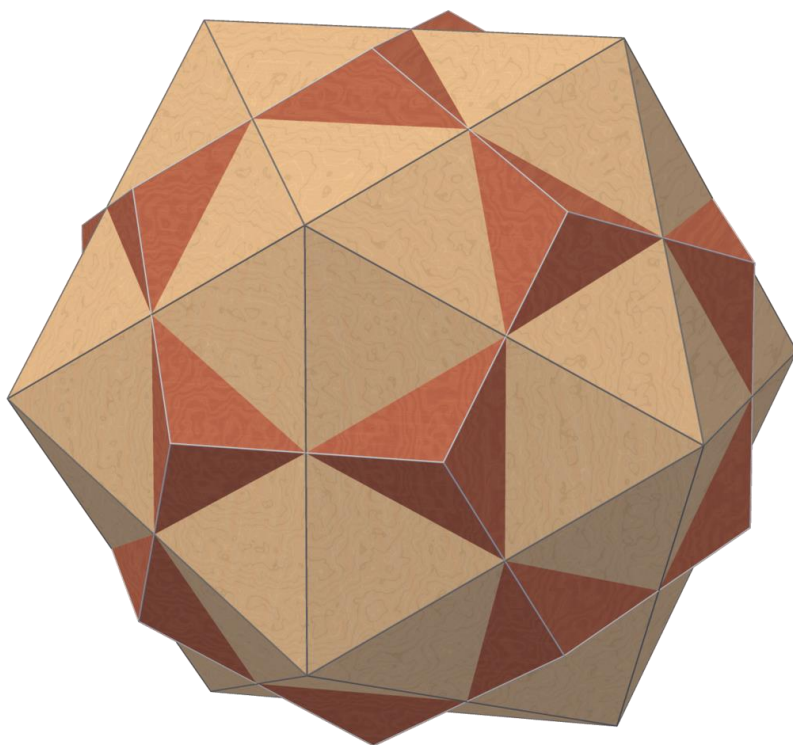
dostupné z: <http://my-empty-spaces.blog.cz/1308/platonska-telesa>



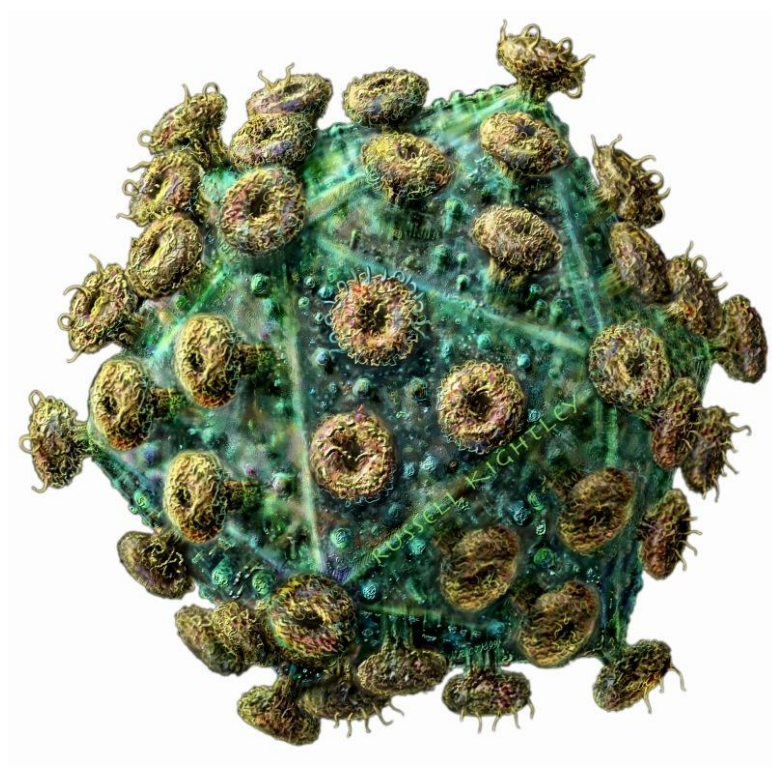
Obrázek 12: Nekonvexní mnohostěn, čtyřstěn a čtyřstěn,
dostupné z: https://en.wikipedia.org/wiki/Platonic_solid#/media/File:Dual_compound_4_max.png



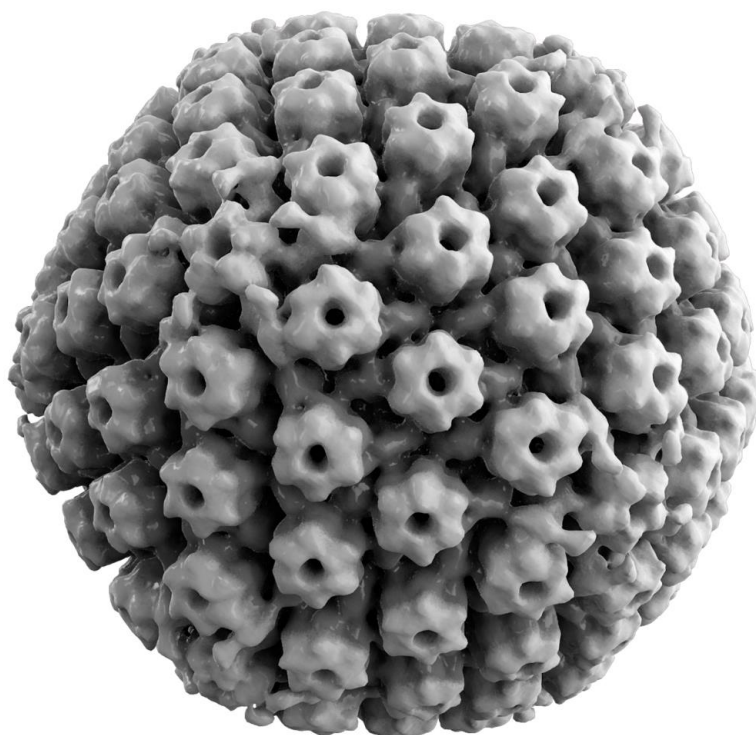
Obrázek 13: Nekonvexní mnohostěn, šestistěn a osmistěn,
dostupné z: https://en.wikipedia.org/wiki/Platonic_solid#/media/File:Dual_compound_8_max.png



Obrázek 14: Nekonvexní mnohostěn, dvanáctistěn a dvacetistěn,
dostupné z: https://en.wikipedia.org/wiki/Platonic_solid#/media/File:Dual_compound_20_max.png

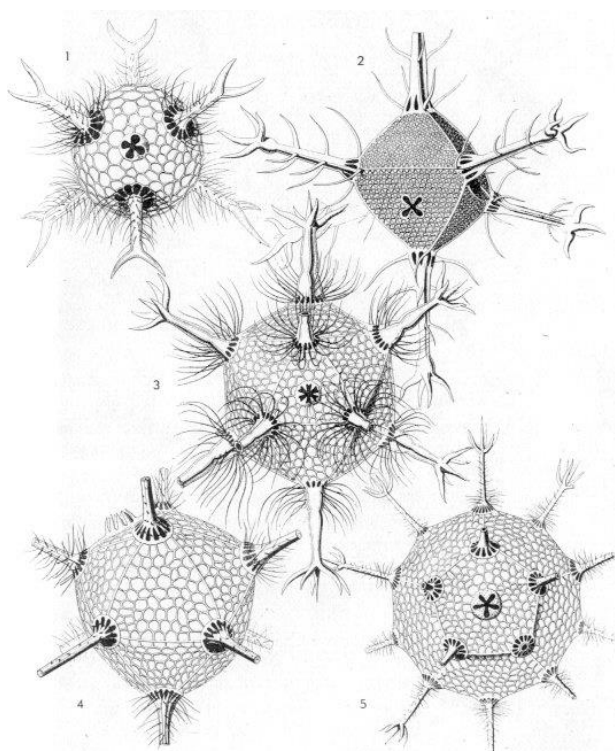


Obrázek 15: Vir HIV,
dostupné z: <https://rkm.com.au/VIRUS/HIV/HIV-virion-laevo.html>



Obrázek 16: Herpes virus,

dostupné z: https://en.wikipedia.org/wiki/Herpes_simplex_virus#/media/File:HSV-1-EM.png



Obrázek 17: Radiolaria,

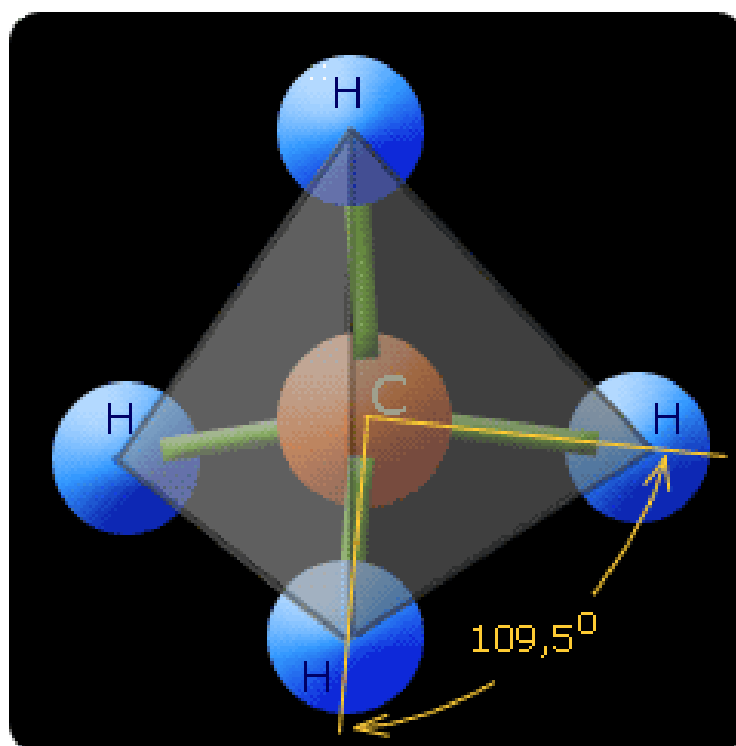
dostupné z: <http://www.georgehart.com/radiolaria/radiolaria.html>



Obrázek 18: Krychlovitý krystal kuchyňské soli,

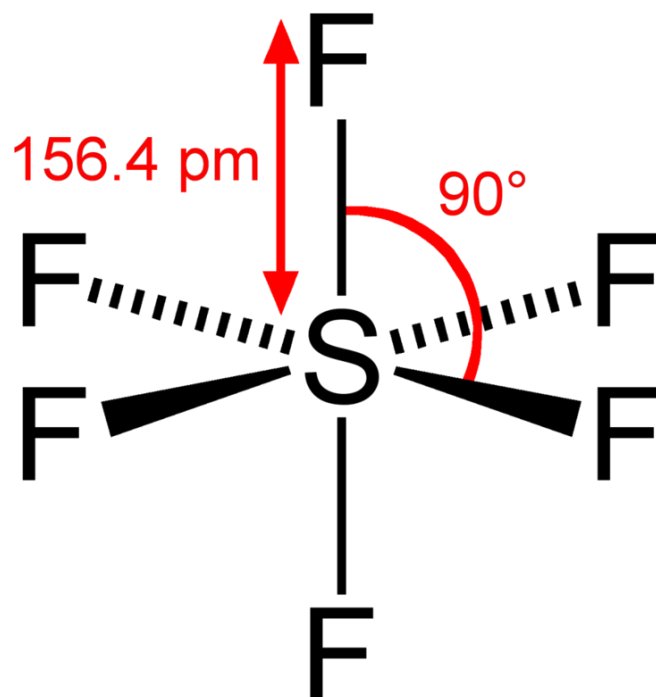
dostupné z:

https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/7/7f/HALIT_X_NaCl_Natriumchlorid_W%C3%9CRFEL_KUBUS_50P.jpg



Obrázek 19: Struktura molekuly metanu,

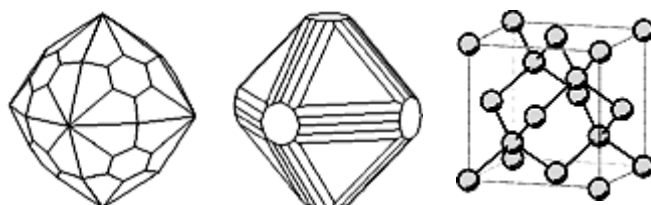
dostupné z: <http://chemia.wpt.kpswjg.pl/semestr2/temat7/temat7.html>



Obrázek 20: Struktura molekuly SF_6 , oktaedr,

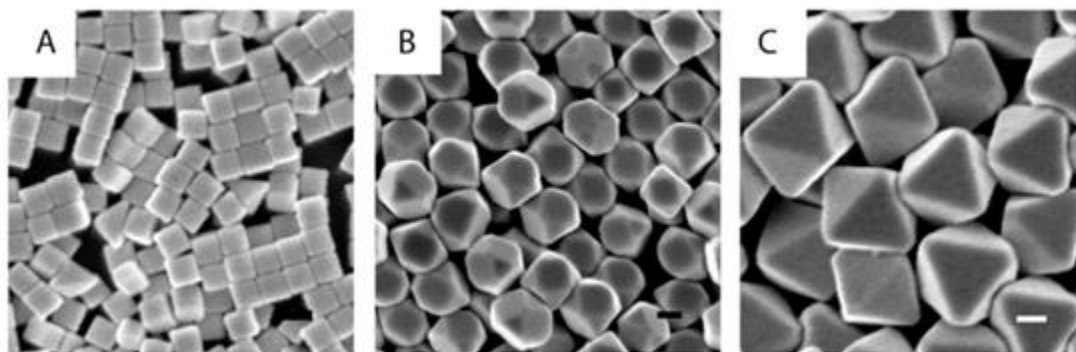
dostupné z:

https://cs.wikipedia.org/wiki/Fluorid_s%C3%ADrov%C3%BD#/media/File:Sulfur-hexafluoride-2D-dimensions.png



Obrázek 21: Tvar krystalů a struktura diamantu,

dostupné z: <https://web.natur.cuni.cz/ugmnz/mineral/mineral/diamant.html>



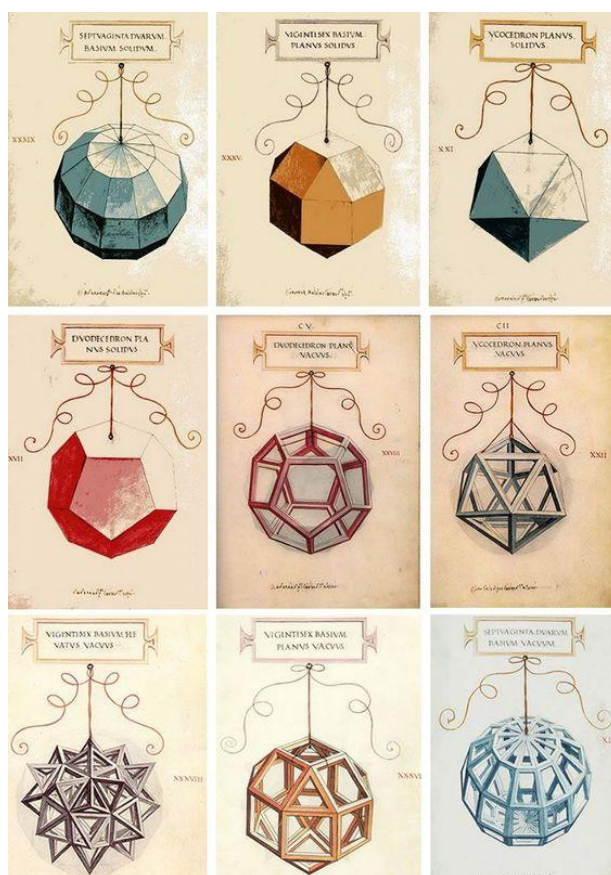
Obrázek 22: Nanočástice ve tvaru platónských těles,

dostupné z: <http://my-empty-spaces.blog.cz/1308/platonska-telesa>



Obrázek 23: Pyramidy, polovina osmistěnu,

dostupné z: <http://www.blesk.cz/clanek/zpravy-svet/504095/kosmicke-zareni-odhalilo-tajemstvi-velke-pyramidy-ukryva-zahadnou-komnatu-co-v-ni-je.html>



Obrázek 24: Ilustrace da Vinciho v knize *O božských proporcích*,

dostupné z: <https://cz.pinterest.com/pin/803259283510217246/>



Obrázek 25: *Poslední večeře* od Salvátora Dalí,
dostupné z: <https://udalosti.signal.cz/1205/salvador-dali>



Obrázek 26: Šaty Amily Hrustic, ikosaedr,
dostupné z: <http://www.designmag.cz/moda/20247-amila-hrustic-navrhla-saty-s-platonskou-geometrii.html#&gid=1&pid=5>



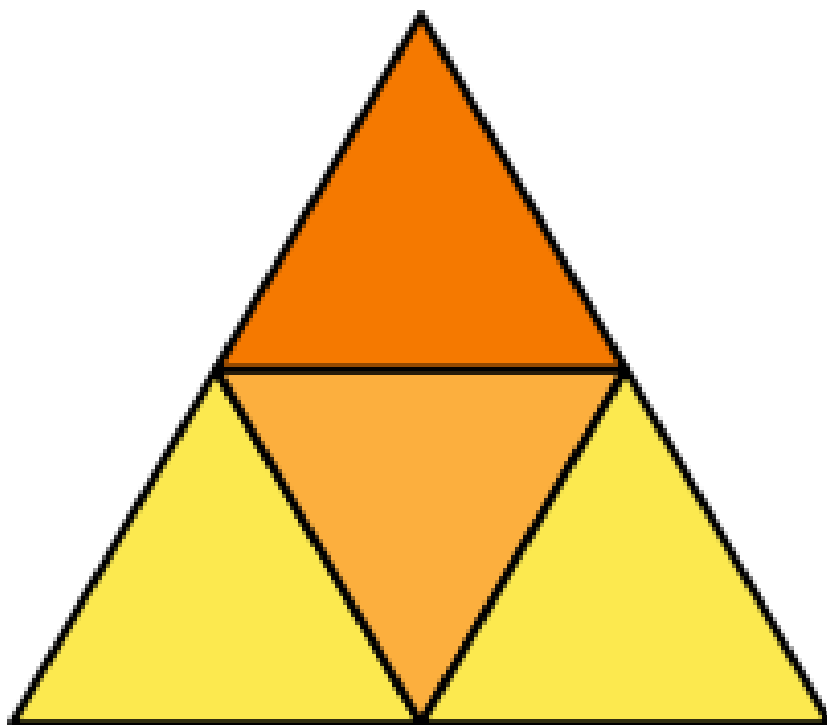
Obrázek 27: Hrací kostky,

dostupné z: https://en.wikipedia.org/wiki/Role-playing_game#/media/File:Dados_4_a_20_caras_trans.png



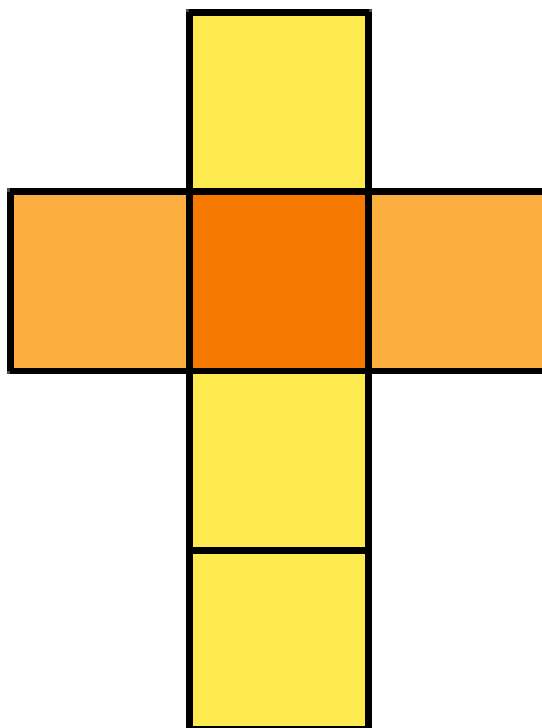
Obrázek 28: Rubikovy kostky,

dostupné z: https://en.wikipedia.org/wiki/Rubik%27s_Cube#/media/File:Rubiks_Platonic_Solids.jpg



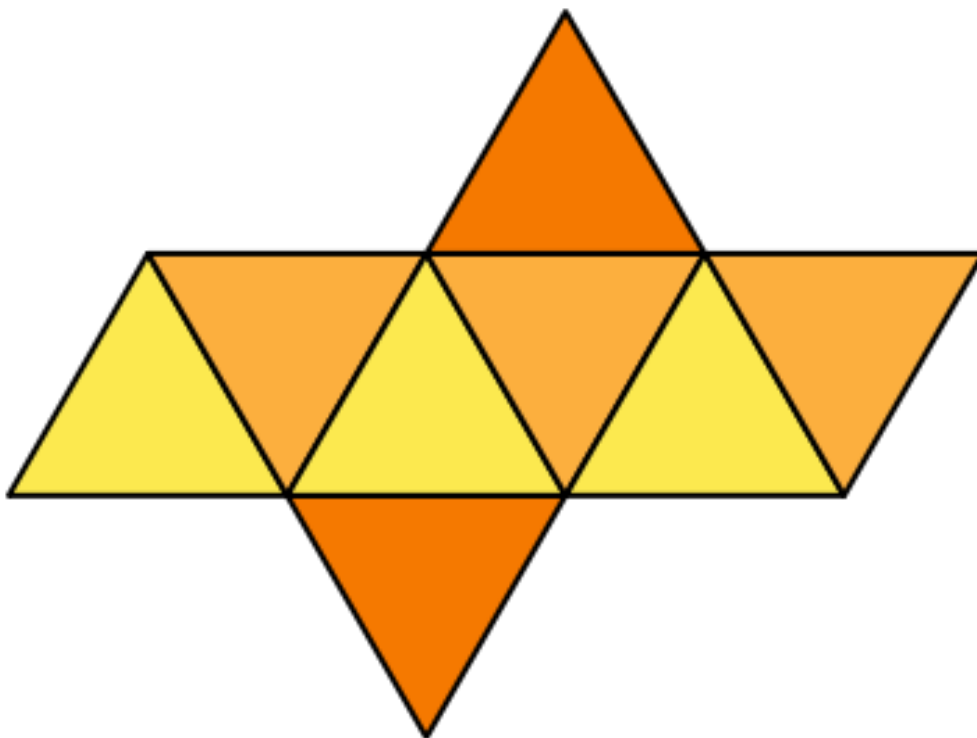
Obrázek 29: Síť čtyřstěnu,

dostupné z: https://en.wikipedia.org/wiki/Tetrahedron#/media/File:Tetrahedron_flat.svg



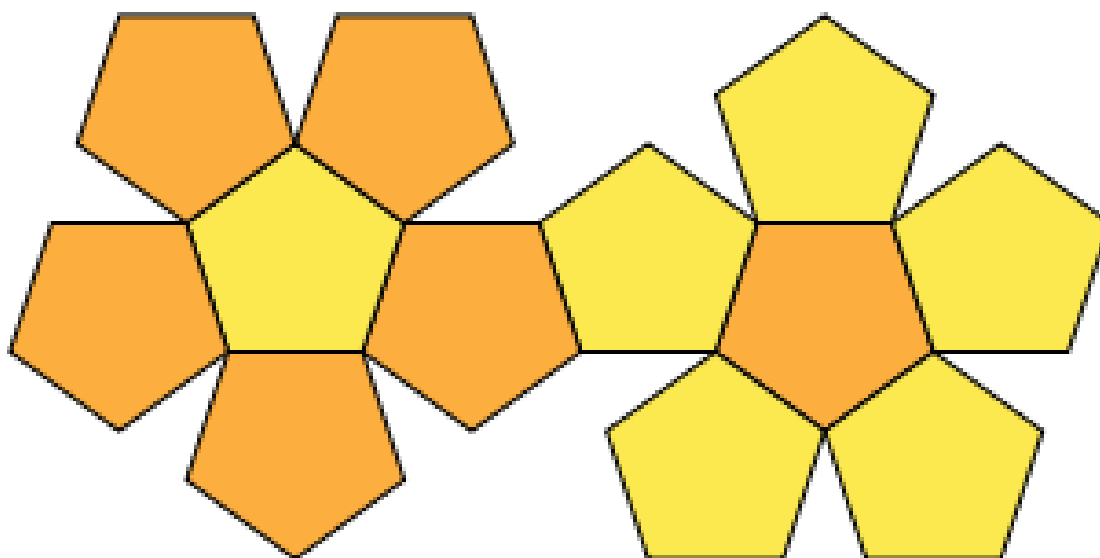
Obrázek 30: Síť šestistěnu,

dostupné z: https://en.wikipedia.org/wiki/Cube#/media/File:Hexahedron_flat_color.svg



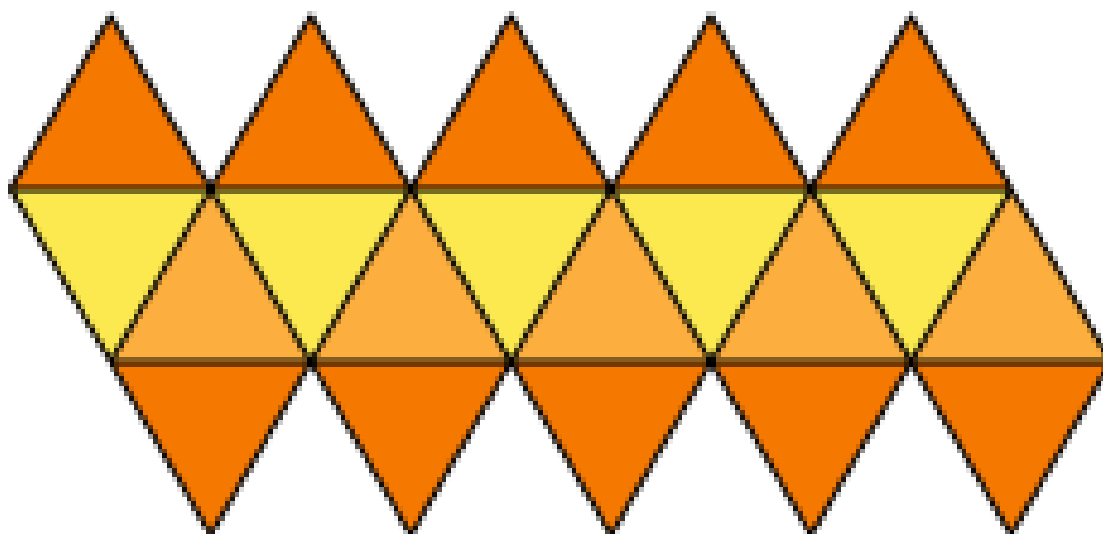
Obrázek 31: Síť osmistěnu,

dostupné z: https://en.wikipedia.org/wiki/Octahedron#/media/File:Octahedron_flat.svg



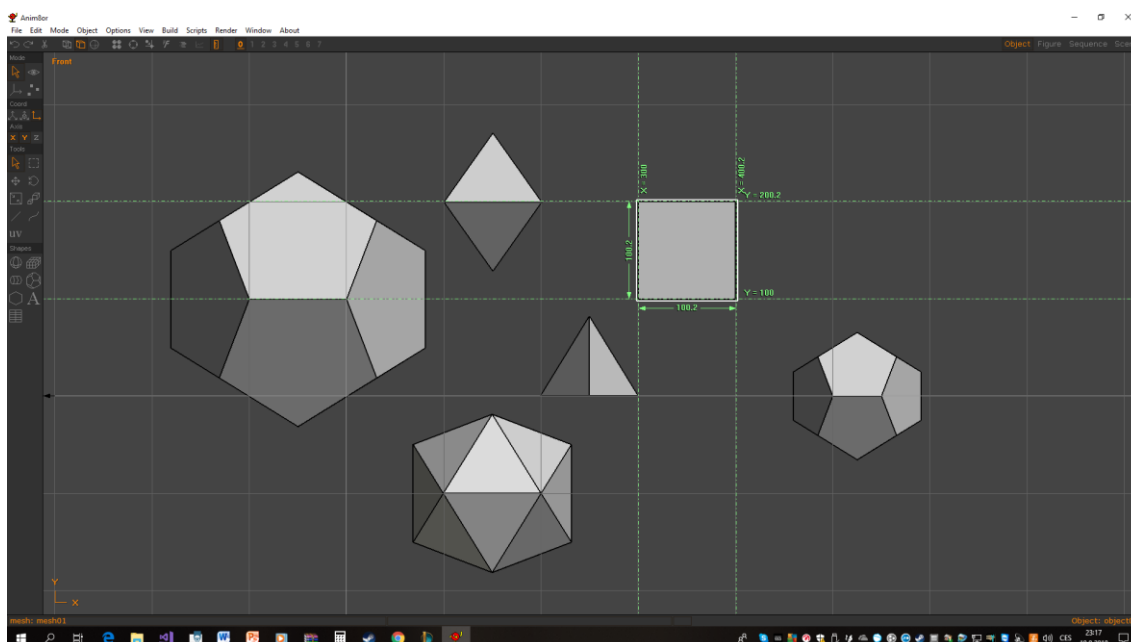
Obrázek 32: Síť dvanáctistěnu,

dostupné z: https://en.wikipedia.org/wiki/Regular_dodecahedron#/media/File:Dodecahedron_flat.svg



Obrázek 33: Síť dvacetistěnu,

dostupné z: https://en.wikipedia.org/wiki/Regular_icosahedron#/media/File:Icosahedron_flat.svg



Obrázek 34: Vymodelovaná tělesa v programu Anim8or,

foto: autor, program dostupný z: <http://www.anim8or.com/download/>



Obrázek 35: 3D tiskárna písku použitá na tisk,
foto: autor



Obrázek 36: Vyndávání vytisknutých 3D modelů,
foto: autor



Obrázek 38: Vytisknuté 3D modely,
foto: autor



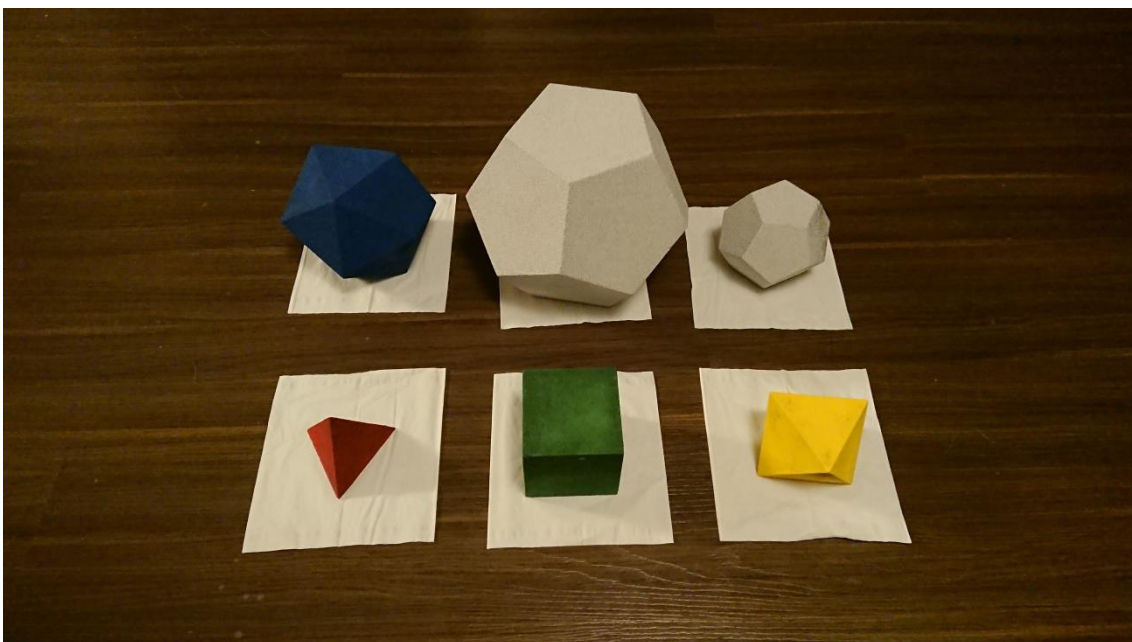
MODELÁRNA LIAZ spol. s r.o.

Obrázek 37: Logo Modelárna Liaz,

dostupné z: <https://oz.kurzy.cz/modelarna-liaz-spol-sro/modelarna-liaz-spol-s-r-o-p174772z248492u.htm>



Obrázek 40: Natírání modelu epoxidem,
foto: autor



Obrázek 39: Nasprejované 3D modely těles,
foto: autor

