

# Matematické spirály

*(projekt)*

Zpracoval: Ondřej Vlk  
Ročník: septima  
Školní rok: 2023/2024  
Zadala: RNDr. Jana Pikousová Doležalová  
Datum odevzdání: 25. října 2023

## **Prohlášení**

Byl jsem seznámen s tím, že na můj projekt se vztahuje zákon č. 121/2000 Sb., o právu autorském, právech souvisejících s právem autorským a o změně některých zákonů (autorský zákon), ve znění pozdějších předpisů, zejména § 60 – školní dílo.

Beru na vědomí, že Doctrina – Podještědské gymnázium nezasahuje do mých autorských práv užitím mého projektu pro potřeby školy. Užiji-li projekt nebo poskytnu-li licenci k jeho využití, jsem si vědom povinnosti informovat gymnázium o této skutečnosti.

Projekt jsem vypracoval samostatně s použitím uvedené literatury a dalších zdrojů a na základě konzultací s vedoucím práce, popř. dalšími konzultanty, kteří jsou v práci uvedeni. Prohlašuji, že tištěná a elektronická verze jsou shodné.

V Liberci dne 24. října 2023

.....

(podpis autora/autorky)

## **Anotace**

Práce se zabývá matematickými spirálami a jejich možným přínosem pro studenty středních škol. V teoretické části práce se nachází úvod do celého tématu – pojem spirála je definován a jsou vysvětleny způsoby jejího popisu na středoškolské úrovni. Dále jsou zde představeny základní typy spirál; u každého typu jsou zmíněny jeho specifické vlastnosti, způsoby konstrukce a významní matematici, kteří se jím zabývali. V praktické části práce je popsána tvorba pracovního listu a příprava výukových hodin pro studenty středních škol na téma matematické spirály. Na základě odučených hodin je zhodnoceno, jaký význam by mohlo mít zařazení tohoto tématu do středoškolských hodin matematiky.

## **Klíčová slova**

Křivka, spirála, polární souřadnice, pracovní list, výukové hodiny

## **Annotation**

The work deals with mathematical spirals and their possible benefits for high school students. In the theoretical part of the work, there is an introduction to the whole topic – the term spiral is defined and the ways of describing it at the high school level are explained. Then, the basic types of spirals are introduced; for each type, its specific properties, methods of construction and significant mathematicians who worked on it are mentioned. The practical part of the work describes the creation of a worksheet and the preparation of lessons for high school students on the topic of mathematical spirals. Based on the lessons taught, it is discussed what benefits the inclusion of this topic in the high school mathematics lessons might have.

## **Keywords**

Curve, spiral, polar coordinates, worksheet, lessons

# OBSAH

Úvod .....	5
1 Úvod do matematických spirál .....	6
1.1 Definice spirály .....	6
1.2 Popis spirály pomocí polárních souřadnic .....	7
1.3 Parametrické vyjádření spirály .....	7
2 Základní typy matematických spirál.....	10
2.1 Archimédova spirála .....	10
2.1.1 Konstrukce.....	12
2.2 Hyperbolická spirála .....	14
2.2.1 Konstrukce.....	15
2.3 Logaritmická spirála .....	17
2.3.1 Konstrukce.....	20
2.4 Zlatá spirála.....	21
2.4.1 Aproximace zlaté spirály .....	23
2.5 Fermatova spirála.....	25
2.5.1 Konstrukce.....	27
2.6 Lituuova spirála .....	27
2.6.1 Konstrukce.....	28
3 Výskyt a využití matematických spirál .....	29
3.1 Výskyt spirál v přírodě.....	29
3.2 Využití spirál.....	30
4 Praktická část: pracovní list a výukové hodiny .....	31
4.1 Pracovní list .....	31
4.2 Prezentace .....	33
4.3 Zpětná vazba .....	33
4.4 Odučené výukové hodiny .....	34
4.5 Diskuze výsledků .....	35
Závěr.....	38
Zdroje.....	39
Přílohy .....	41

# ÚVOD

V přírodě se lze často setkat s objekty, které svým tvarem připomínají jeden z typů matematických křivek – spirálu. Může se jednat o uspořádání semen v květech rostlin, ulity hlemýžďů nebo celé galaxie. Kvůli jejich přirozenému výskytu se spirálami zabývali matematici již od starověku s cílem tuto křivku popsat a pochopit její význam v přírodě. Dnes jsou již spirály podrobně popsány s využitím velmi pokročilé matematiky, jejich základní vlastnosti lze ale popsat i pomocí matematiky středoškolské. I přesto je toto téma na středních školách zcela opomíjeno.

Cílem práce je představit spirálu jako matematickou křivku a ukázat možné způsoby jejího popisu. Dále seznámit čtenáře se základními typy matematických spirál, tyto typy popsat a ukázat možné způsoby jejich konstrukce. Zároveň by práce měla obsahovat příklady výskytu spirál v přírodě a jejich využití v praxi. V praktické části projektu je cílem vytvořit pracovní list pro studenty středních škol na téma matematické spirály a během výukových hodin studenty s tímto tématem seznámit. Na základě hodin by poté měl být zhodnocen přístup studentů k tématu a přínos tématu pro studenty.

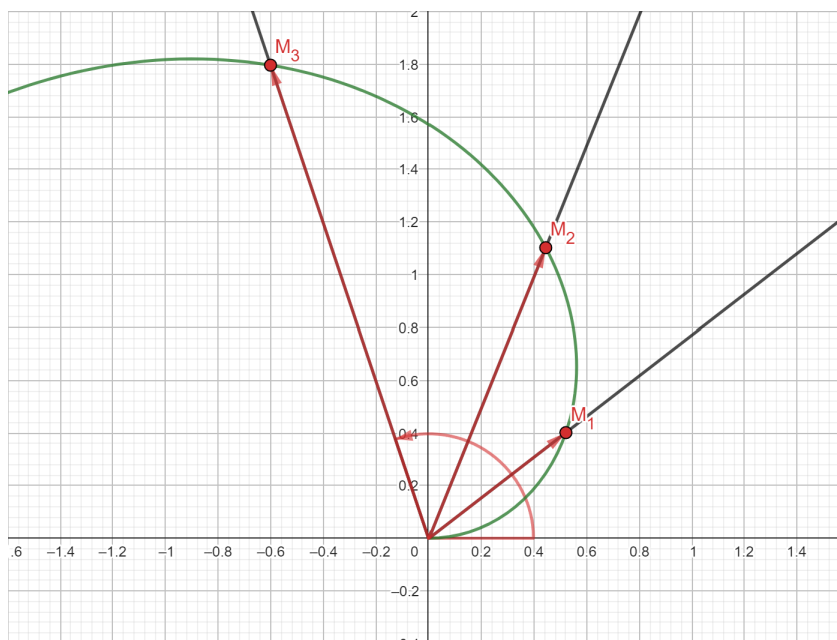
Práce je rozdělena na čtyři kapitoly. V první kapitole jsou matematické spirály definovány a je zde ukázán jejich popis pomocí souřadnicových systémů. Ve druhé kapitole je následně představeno šest základních typů spirál – Archimédova spirála, hyperbolická spirála, logaritmická spirála, zlatá spirála, Fermatova spirála a Lituuova spirála. Popis všech těchto typů je pro větší srozumitelnost doplněn obrázky spirál a nákresy některých situací. Ve třetí kapitole jsou uvedeny příklady výskytu a využití spirál, které jsou doplněny obrázky umístěnými v přílohách. Poslední kapitola se zabývá praktickou částí projektu. Zde jsou představeny materiály použité při výukových hodinách – pracovní list, prezentace s obrázky a zpětná vazba. Dále jsou zde blíže popsány odučené hodiny a z nich získaná data. Na základě dat je poté provedena diskuze, ve které jsou výukové hodiny zhodnoceny.

# 1 ÚVOD DO MATEMATICKÝCH SPIRÁL

Spirála je jedním ze základních typů rovinných křivek. Poprvé se o její matematický popis pokusil řecký matematik a fyzik Archimédes ze Syrakus (287–212 př. n. l.) ve svém díle *O spirálách*. V tomto díle definoval jeden ze základních typů spirál, který je po něm pojmenován jako tzv. Archimédova spirála. Dnes je již známo několik dalších druhů spirál, přičemž každý má odlišný tvar a vlastnosti. Aby ale bylo možné tyto typy představit, je nejdříve potřeba pojem spirála definovat a ukázat, jakým způsobem se tato křivka v matematice popisuje (Kozubek, 2014, s. 26–27).

## 1.1 Definice spirály

Spirála vzniká jako trajektorie pohybu popsaného v následující situaci: V kartézské soustavě souřadnic je polopřímka, která má počáteční bod v počátku soustavy a je shodná s kladnou částí osy  $x$ . V počátku soustavy dále leží bod  $M$ , který se v určitý moment začne pohybovat po polopřímce směrem od počátku. Ve stejný moment, kdy se začne pohybovat po polopřímce, se polopřímka začne okolo počátku soustavy otáčet proti směru hodinových ručiček (FA ČVUT, 2017, s. 1).



Obrázek 1: Bod  $M$  pohybující se po rotující polopřímce; směr pohybů je vyznačen červeně (autor, 2023)

Bod  $M$  vykonává dva pohyby současně – společně s polopřímkou rotuje okolo počátku a zároveň se od něj vzdaluje (na obrázku 1 je zobrazen ve třech různých momentech). Výslednou trajektorii je spirála, z čehož vyplývá její základní definice: spirála je křivka, která

obíhá konkrétní bod, přičemž se od něj neustále vzdaluje. Tento bod (v uvedené situaci počátek soustavy) se nazývá pól spirály (FA ČVUT, 2017, s. 1; Voráčková a kol., 2012, s. 134).

## 1.2 Popis spirály pomocí polárních souřadnic

Pozici bodu  $M$  lze v libovolném momentu popsat dvěma hodnotami – jeho vzdáleností od pólu  $r$  a úhlem  $\theta$ , který svírá v daný moment polopřímka s osou  $x$  (tj. úhlem, který bod urazil při rotaci). Výsledná spirála vzniklá popsáním pohybem má odlišný tvar podle toho, jak se vzdálenost  $r$  mění v závislosti na hodnotě  $\theta$ . Pro každou spirálu se proto zavádí funkce  $r(\theta)$ , která tuto závislost popisuje. Pokud například platí závislost

$$r(\theta) = \frac{\theta}{\pi}, \quad [1]$$

pak pro úhel  $\theta = \pi/2$  platí

$$r(\pi/2) = \frac{\pi/2}{\pi} = \frac{1}{2}. \quad [2]$$

To znamená, že v momentě, kdy polopřímka svírá s osou  $x$  úhel  $\pi/2$ , se bod  $M$  nachází ve vzdálenosti  $1/2$  od pólu spirály. Pro úhel  $\pi$  se poté nachází ve vzdálenosti  $1$ , pro úhel  $2\pi$  ve vzdálenosti  $2$  atd. (Voráčková a kol., 2012, s. 134)

Funkce  $r(\theta)$  se obvykle definuje pouze pro nezáporné úhly, tj.  $\theta \in \langle 0; \infty \rangle$ . V tomto intervalu přiřazuje každému úhlu konkrétní hodnotu  $r$ , popisuje tak polohu bodu během celého pohybu. Spirála je tím pádem touto funkcí přesně definovaná. Tento typ souřadnic, kdy je poloha bodu dána hodnotami  $r$  a  $\theta$ , se nazývá polární. Při popisu spirál jsou polární souřadnice používány častěji než kartézské souřadnice, neboť je výsledný předpis spirály obvykle jednodušší (Jarešová a Zhouf, 2009, s. 8; Voráčková a kol., 2012, s. 134).

## 1.3 Parametrické vyjádření spirály

Pomocí kartézských souřadnic je možné vyjádřit spirálu jako tzv. parametrickou křivku. V polárních souřadnicích je libovolný bod na spirále popsán pomocí hodnot  $r$  a  $\theta$ , pomocí kterých lze vypočítat kartézské souřadnice tohoto bodu, tj. souřadnice  $x$  a  $y$ . Pokud jsou všechny čtyři hodnoty pro daný bod zakresleny do systému souřadnic (viz obrázek 2), je patrné, že platí:

$$x = r \cos \theta, \quad [3]$$

$$y = r \sin \theta. \quad [4]$$

Vzdálenost  $r$  je dána funkcí  $r(\theta)$ , obě souřadnice  $x, y$  jsou tak funkcí úhlu  $\theta$ . Při parametrickém vyjádření je  $\theta$  nahrazeno parametrem  $t$ , pro který stejně jako pro  $\theta$  platí  $t \in \langle 0; \infty \rangle$ . Spirála je pak množina všech bodů, jejichž souřadnice  $x, y$  lze vyjádřit jako

$$x = r(t) \cos t, \quad [5]$$

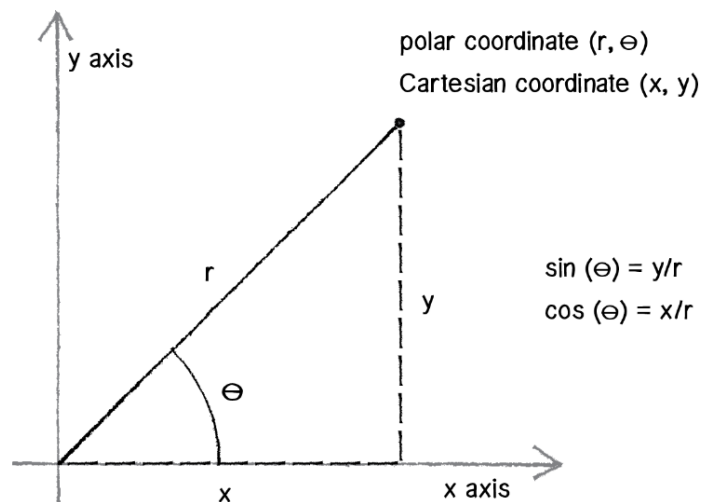
$$y = r(t) \sin t, \quad [6]$$

kde funkce  $r(t)$  je shodná s funkcí  $r(\theta)$ , pouze má jiný argument. Parametrické vyjádření spirály popsané v polárních souřadnicích rovnicí [1] by tak například bylo:

$$x = \frac{t}{\pi} \cos t, \quad [7]$$

$$y = \frac{t}{\pi} \sin t. \quad [8]$$

Dosazováním různých hodnot  $t$  z určeného intervalu  $\langle 0; \infty \rangle$  lze poté zjistit kartézské souřadnice bodů na této spirále (Jarešová a Zhouf, 2009, s. 8).



Obrázek 2: Bod s polárními souřadnicemi  $(r, \theta)$  a kartézskými souřadnicemi  $(x, y)$

(Zdroj: <https://www.khanacademy.org/computing/computer-programming/programming-natural-simulations/programming-angular-movement/a/polar-coordinates>)



Parametrické vyjádření spirály bývá oproti popisu v polárních souřadnicích složitější. Souřadnice konkrétních bodů se dopočítávají obtížněji, protože je třeba pro každou hodnotu parametru zjišťovat sinus a kosinus této hodnoty. Oproti polárním souřadnicím je ale parametrické vyjádření lepší při modelování spirál na počítači, kdy je pomocí něj možné snadno nechat spirálu vygenerovat např. v programu Geogebra (Jarešová a Volf, 2007).

## 2 ZÁKLADNÍ TYPY MATEMATICKÝCH SPIRÁL

V této kapitole je představeno 6 základních typů spirál – Archimédova spirála, hyperbolická spirála, logaritmická spirála, zlatá spirála, Fermatova spirála a Lituuova spirála. U každé spirály jsou nejdříve zmíněni významní matematici, kteří se daným typem zabývali. Dále je uveden popis spirály v polárních souřadnicích a parametrické vyjádření, které je odvozeno pomocí rovnic [5] a [6]. Nakonec jsou zmíněny specifické vlastnosti spirály a možné způsoby její konstrukce.

### 2.1 Archimédova spirála

Archimédova spirála nese jméno již zmíněného Archiméda ze Syrakus, který ji jako první definoval a popsal (jednalo se tak o první matematicky popsanou spirálu). Následně našel i její první využití, když ji použil při rektifikaci kružnice<sup>1</sup> (Kozubek, 2014, s. 26–27; Voráčková a kol., 2012, s. 134).

Archimédova spirála vzniká, pokud se bod  $M$  i rotující polopřímka pohybují konstantní rychlostí, tj. rovnoměrně. V polárních souřadnicích je popsána rovnicí

$$r(\theta) = a\theta, \quad [9]$$

kde  $a$  je libovolné kladné číslo. Pro Archimédovu spirálu tak platí, že její vzdálenost od pólu je přímo úměrná úhlu otočení. Parametricky lze spirálu vyjádřit jako

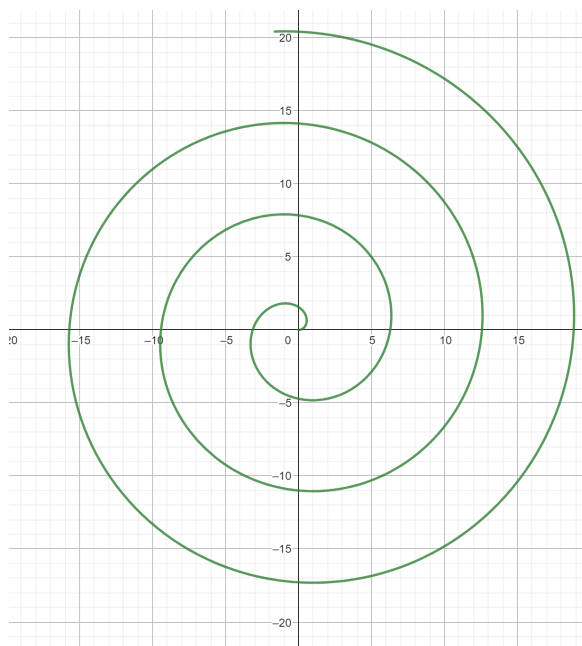
$$x = at \cos t, \quad [10]$$

$$y = at \sin t. \quad [11]$$

Pro libovolnou hodnotu  $a$  platí  $r(0) = 0$ , Archimédova spirála tak vždy začíná v počátku soustavy souřadnic (viz obrázek 3). Od tohoto bodu se poté vzdaluje, jedná se tak zároveň o její pól (Jarešová a Zhouf, 2009, s. 9).

---

<sup>1</sup> Rektifikace kružnice – sestavení úsečky, která má stejnou délku jako kružnice o daném poloměru (Voráčková a kol., 2012, s. 134)



Obrázek 3: Archimédova spirála pro  $a = 1$ ,  $t \in \langle 0; 20,5 \rangle$  (autor, 2023)

Specifickou vlastnost Archimédovy spirály lze ukázat na následujícím příkladu: Z počátku soustavy souřadnic je vedena polopřímka, která s osou  $x$  svírá úhel  $\varphi$ . Tato polopřímka protíná Archimédovu spirálu popsanou obecnou rovnicí [9] ve všech bodech, pro jejichž úhel  $\theta$  platí

$$\theta = \varphi + 2\pi k, \quad [12]$$

kde  $k$  je libovolné přirozené číslo. Všechny tyto úhly mají totiž základní velikost rovnu  $\varphi$ , tím pádem leží body, které jsou těmito úhly popsány, na dané polopřímce (viz obrázek 4). Každý tento bod lze nyní podle hodnoty  $k$ , která mu přísluší v rovnici [12], označit jako  $M_k$ . Například pro bod  $M_0$  platí  $k = 0$ , jeho úhel  $\theta$  je tak roven

$$\varphi + 2\pi \cdot 0 = \varphi. \quad [13]$$

Vzdálenost tohoto bodu od pólu spirály je poté podle rovnice [9]

$$r = a\varphi. \quad [14]$$

Obdobně je poté možné dopočítat vzdálenosti ostatních bodů ležících na polopřímce. Pro bod  $M_1$  platí:

$$\theta = \varphi + 2\pi \cdot 1 = \varphi + 2\pi, \quad [15]$$

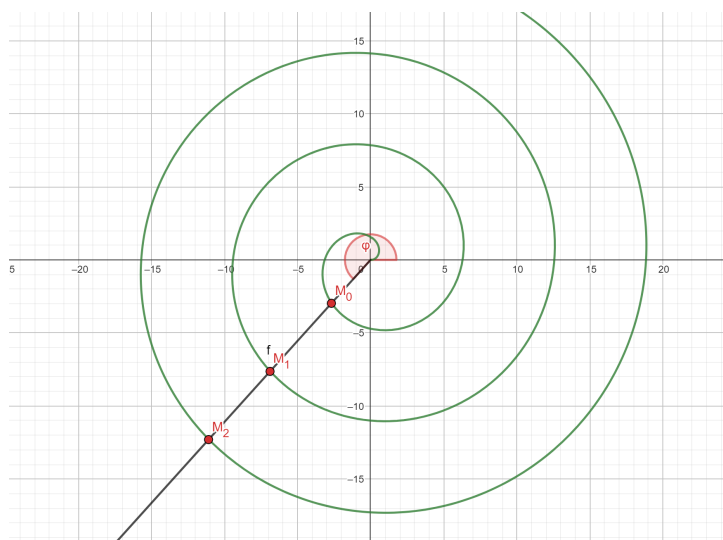
$$r = a(\varphi + 2\pi) = a\varphi + 2\pi a. \quad [16]$$

Pro bod  $M_2$  následně platí:

$$\theta = \varphi + 2\pi \cdot 2 = \varphi + 4\pi, \quad [17]$$

$$r = a(\varphi + 4\pi) = a\varphi + 4\pi a. \quad [18]$$

Lze si všimnout, že vzdálenost  $r$  se vždy zvětší o stejnou hodnotu, konkrétně o  $2\pi a$ . To znamená, že každé dva sousední body ležící na dané polopřímce jsou od sebe stejně daleko. Toto tvrzení platí pro jakoukoli Archimédovu spirálu a jakýkoli úhel  $\varphi$  (tj. pro jakoukoli polopřímku s počátkem v počátku souřadnicové soustavy). To lze využít například při konstrukci Archimédovy spirály – stačí zjistit pouze polohu bodu  $M_0$  a všechny ostatní body ležící na stejné polopřímce pak konstruovat nanášením hodnoty  $2\pi a$  na danou polopřímku (Jarešová a Volf, 2007).



Obrázek 4: Polopřímka protínající Archimédovu spirálu v bodech  $M_0$ ,  $M_1$  a  $M_2$  (autor, 2023)

### 2.1.1 Konstrukce

Archimédovu spirálu nelze konstruovat přímo jako křivku, lze pouze konstruovat body, které na ní leží, a následně je co nejplynuleji propojit (to platí obecně i pro další typy spirál). Při konstrukci bodů se postupuje následovně: úhel  $2\pi$  okolo počátku soustavy souřadnic je pomocí určitého počtu polopřímek rozdělen na stejně velké části. Pro příklad lze uvažovat 12 polopřímek, tj. úhel je rozdělen na 12 částí. Tyto polopřímky svírají s osou  $x$  po řadě úhly

$$\theta_0 = 0, \quad [19]$$

$$\theta_1 = \frac{2\pi}{12} = \frac{\pi}{6}, \quad [20]$$

$$\theta_2 = 2 \cdot \frac{2\pi}{12} = \frac{\pi}{3}, \quad [21]$$

$$\theta_3 = 3 \cdot \frac{2\pi}{12} = \frac{\pi}{2} \quad [22]$$

atd. Vzdálenost od pólu  $r$  bodů ležících na dané polopřímce je poté možné nalézt pomocí rovnice [9]:

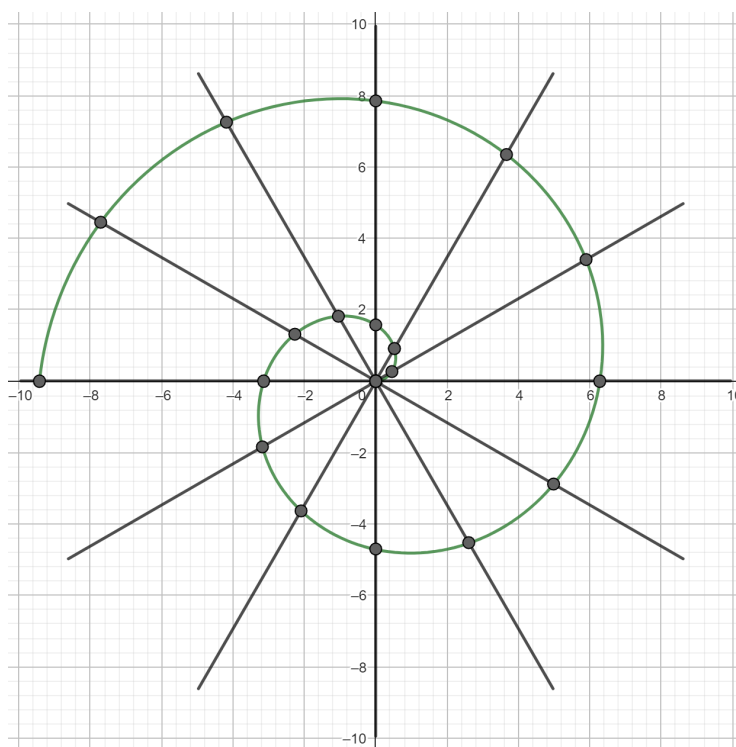
$$r_0 = 0, \quad [23]$$

$$r_1 = \frac{\pi}{6} a, \quad [24]$$

$$r_2 = \frac{\pi}{3} a, \quad [25]$$

$$r_3 = \frac{\pi}{2} a \quad [26]$$

atd. Nyní lze na každou polopřímku nanést bod s příslušící vzdáleností od pólu spirály. Poté, co je na každé polopřímce určen jeden bod, lze využít dříve odvozené vlastnosti Archimédovy spirály – na každou polopřímku stačí nanést od zkonstruovaného bodu vzdálenost  $2\pi a$ , čímž vznikne další bod ležící na spirále (tento krok lze neomezeně opakovat). Spojením bodů poté vzniká Archimédova spirála (viz obrázek 5) (Jarešová a Zhouf, 2009, s. 9–10).



Obrázek 5: Konstrukce Archimédovy spirály pomocí 12 polopřímek (Autor, 2023)

Při konstrukci spirály je vhodné volit konstantu  $a$  ve tvaru

$$a = \frac{n}{\pi}, \quad [27]$$

kde  $n$  je přirozené číslo. Díky této volbě se při výpočtu vzdáleností  $r$  zkrátí  $\pi$ , výsledná hodnota je tak buď zlomek, nebo celé číslo. Při vhodné volbě čísla  $n$  je možné docílit i toho, že jsou vzdálenosti konstruovaných bodů vždy celočíselné. U popsaného způsobu konstrukce pomocí 12 polopřímek takto funguje například  $n = 6$ , výsledné hodnoty  $r$  jsou poté

$$r_0 = 0, \quad [28]$$

$$r_1 = \frac{6}{\pi} \cdot \frac{\pi}{6} = 1, \quad [29]$$

$$r_2 = \frac{6}{\pi} \cdot \frac{\pi}{3} = 2, \quad [30]$$

$$r_3 = \frac{6}{\pi} \cdot \frac{\pi}{2} = 3 \quad [31]$$

atd. Kromě  $n = 6$  funguje stejně i jakýkoli jiný násobek šesti, výsledné vzdálenosti jsou pouze větší.

## 2.2 Hyperbolická spirála

Hyperbolickou spirálu poprvé navrhl francouzský matematik Pierre Varignon (1654–1722) v roce 1704. Jejím studiu se dále věnovali švýcarský matematik a fyzik Johann Bernoulli (1667–1748) a anglický matematik Roger Cotes (1682–1716) (Jarešová a Volf, 2007).

Hyperbolická spirála má v polárních souřadnicích předpis

$$r(\theta) = \frac{a}{\theta}, \quad [32]$$

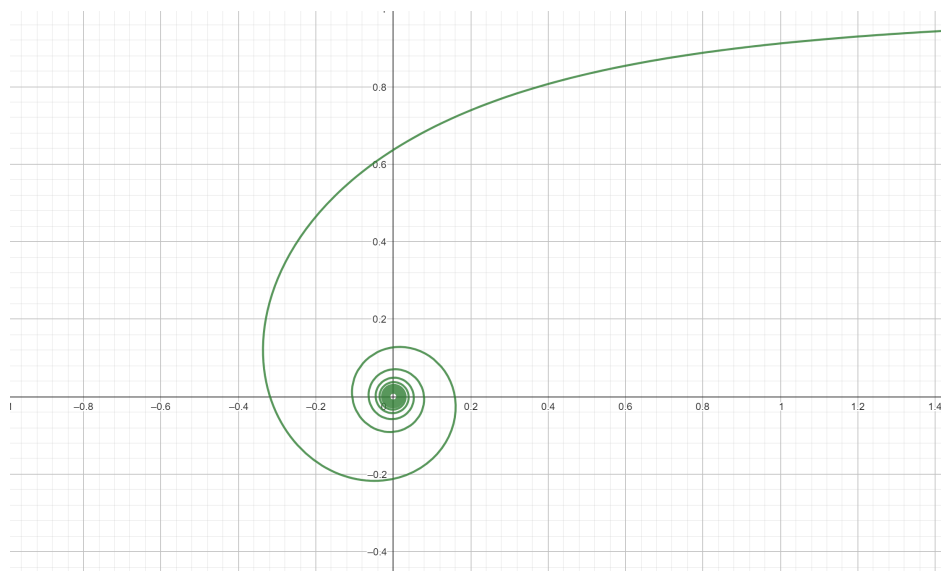
kde  $a$  je libovolné kladné číslo. Parametrické vyjádření spirály je poté

$$x = \frac{a}{t} \cos t, \quad [33]$$

$$y = \frac{a}{t} \sin t. \quad [34]$$

Zatímco Archimédova spirála se s rostoucím úhlem  $\theta$  od svého pólu vzdaluje, hyperbolická spirála se naopak s rostoucím úhlem přibližuje, tj. funkce  $r(\theta)$  je klesající. K pólu se přiblíží

nekonečně blízko, ale nikdy ho nedosáhne, neboť hodnota  $r(\Theta)$  může být nekonečně malá, ale nikdy nemůže být rovna nule (viz obrázek 6). Pól spirály je v tomto případě tzv. asymptotickým bodem křivky (Jarešová a Zhouf, 2009, s. 13).



Obrázek 6: Hyperbolická spirála pro  $a = 1, t \in \langle 0; 100 \rangle$  (autor 2023)

### 2.2.1 Konstrukce

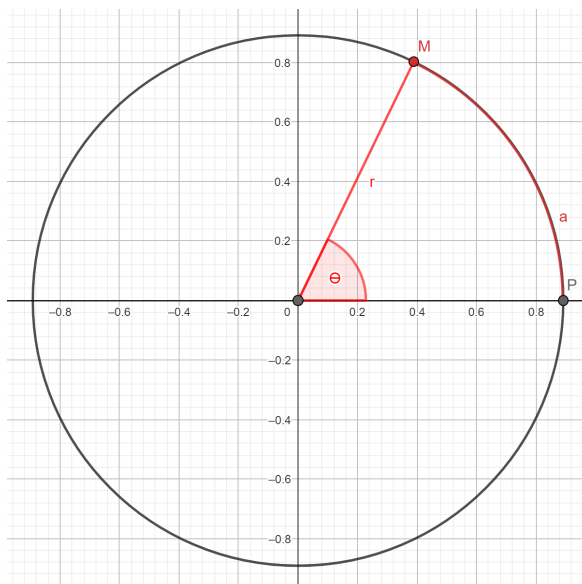
Hyperbolickou spirálu lze konstruovat podobným způsobem jako Archimédovu spirálu, tj. rozdělením úhlu okolo počátku soustavy souřadnic pomocí polopřímek a následným nanášením dopočítaných vzdáleností. V tomto případě již nelze využít fakt, že mezi dvěma sousedními body ležícími na stejné polopřímce je vždy stejná vzdálenost, protože toto tvrzení pro hyperbolickou spirálu neplatí. Je proto výhodnější využít jiný postup.

Nejčastěji se hyperbolická spirála konstruuje následovně: Do soustavy souřadnic je narýsována kružnice se středem v počátku soustavy a poloměrem  $r$ . Tato kružnice protíná kladnou část osy  $x$  v bodě  $P$ . Od bodu  $P$  je nyní proti směru hodinových ručiček odměřen úsek kružnice o délce  $a$ . Konec tohoto úseku je označen bodem  $M$  (viz obrázek 7). Tento bod je v polárních souřadnicích popsán úhlem  $\Theta$ , který svírá osa  $x$  se spojnicí tohoto bodu a počátku soustavy souřadnic. Pro tento úhel z definice obloukové míry platí

$$\theta = \frac{a}{r}, \quad [35]$$

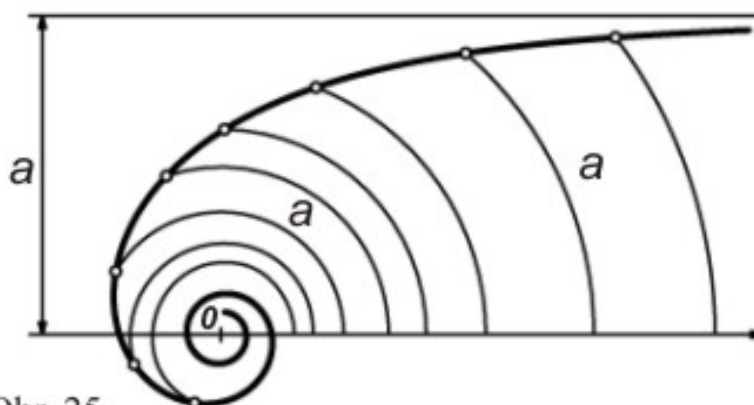
tj. je dán poměrem délky jemu příslušícího oblouku  $a$  a poloměrem kružnice  $r$ . Úpravou této rovnice lze poté získat vztah, který je shodný s rovnicí [32], tj. polárním popisem hyperbolické spirály. To znamená, že bod  $M$  leží na hyperbolické spirále s koeficientem  $a$ .

Další body na spirále lze poté získat stejným postupem, pouze stačí změnit poloměr kružnice  $r$ . Délka odměřovaného oblouku  $a$  se při změně hodnoty  $r$  nemění, pro danou spirálu se jedná o konstantu (Jarešová a Volf, 2007).



Obrázek 7: Konstrukce bodu M na hyperbolické spirále (autor, 2023)

Z uvedeného postupu konstrukce lze odvodit další vlastnost hyperbolické spirály: při zvětšování poloměru kružnice  $r$  se nanášený oblouk postupně „narovňuje“, čímž se svým tvarem přibližuje přímce (viz obrázek 8). Pro velké hodnoty  $r$  tak nanášený oblouk téměř odpovídá úsečce o délce  $a$ , což znamená, že hyperbolická spirála téměř kopíruje přímku, která je rovnoběžná s osou  $x$  a nachází se od ní ve vzdálenosti  $a$ . Vzdálenost spirály od této přímky se zmenšuje, nikdy ale není nulová (nanášený oblouk nikdy neodpovídá přesně úsečce). To znamená, že se spirála k této přímce asymptoticky přibližuje (Jarešová a Volf, 2007).



Obr. 25

Obrázek 8: oblouky o délce  $a$  použité při konstrukci hyperbolické spirály  
(Zdroj: <http://fyzikalniolympiada.cz/cd/matematika/krivky/spiraly/hyperb.htm>)



## 2.3 Logaritmická spirála

Logaritmickou spirálou se jako první zabýval francouzský matematik, fyzik a filosof René Descartes (1596–1650). O pár let později se nezávisle na něm této křivce začal věnovat i italský matematik a fyzik Evangelista Toricelli (1608–1648). Největší podíl na popisu logaritmické spirály má však švýcarský matematik a fyzik Jacob Bernoulli (1655–1705), který se této křivce věnoval několik let, dokonce si ji nechal vytesat na svůj hrob (Jarešová a Zhouf, 2009, s. 6).

Logaritmická spirála je v polárních souřadnicích popsána rovnicí

$$r(\theta) = ae^{b\theta}, \quad [36]$$

kde  $a$  a  $b$  jsou libovolná kladná čísla a  $e$  je Eulerovo číslo ( $e \doteq 2,718$ ). Název logaritmická spirála je odvozen z jiného tvaru této rovnice. Pokud jsou obě strany vyděleny číslem  $a$ , vypadá rovnost takto:

$$\frac{r}{a} = e^{b\theta}. \quad [37]$$

Nyní je možné rovnici zlogaritmovat pomocí logaritmu o základu  $e$  (tzv. přirozený logaritmus) – ten se místo  $\log_e$  zapisuje jako  $\ln$ :

$$\ln \frac{r}{a} = \ln(e^{b\theta}). \quad [38]$$

Prvou stranu rovnice je možné pomocí základních vlastností logaritmů upravit do tvaru

$$\ln(e^{b\theta}) = b\theta \ln(e) = b\theta. \quad [39]$$

Rovnice [36] je tak ekvivalentní s rovnicí

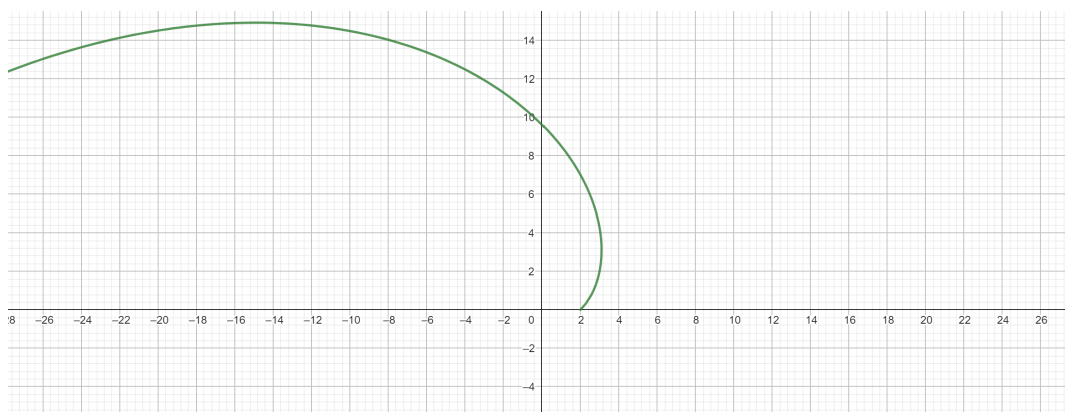
$$\ln \frac{r}{a} = b\theta. \quad [40]$$

Název logaritmická spirála pak vychází právě z tohoto vztahu. Parametrické vyjádření logaritmické spirály je poté

$$x = ae^{bt} \cos t, \quad [41]$$

$$y = ae^{bt} \sin t. \quad [42]$$

Na základě rovnice [36] platí pro jakoukoli logaritmickou spirálu, že  $r(0) = a$ . To znamená, že vždy začíná v bodě s kartézskými souřadnicemi  $[a; 0]$  (viz obrázek 9). Jako pól spirály je ale stejně jako u ostatních typů brán počátek soustavy souřadnic. Spirála tohoto bodu nedosáhne, neboť neexistuje hodnota  $\theta$ , pro kterou by platilo  $r(\theta) = 0$ . Na rozdíl od hyperbolické spirály se ale nejedná o asymptotický bod, protože má spirála vždy od tohoto bodu konečnou vzdálenost (začátek spirály je nejbližším bodem k pólu, více se k němu spirála nepřibližuje). K asymptotickému přibližování by došlo, pokud by byl interval, ve kterém se může nacházet  $\theta$ , rozšířen na  $(-\infty; \infty)$ , kde zápornou hodnotou úhlu je myšlen úhel, který je odměřen ve směru hodinových ručiček (tj. v opačném směru, než jsou odměřovány kladné úhly). V záporných hodnotách  $\theta$  by se spirála nekonečně přibližovala k pólu, nikdy by ho ale nedosáhla, protože by stále neexistovala hodnota, pro kterou by platilo  $r(\theta) = 0$  (Jarešová a Zhouf, 2009, s.10).



Obrázek 9: Počátek logaritmické spirály s předpisem  $r(\theta) = 2e^\theta$  (autor, 2023)

Obdobně jako u Archimédovy spirály existuje u logaritmické spirály vztah mezi body, které leží na stejné polopřímce s počátkem v počátku soustavy souřadnic. Lze ho také odvodit stejným způsobem (viz kapitola 2.1): opět lze předpokládat polopřímku, která s osou  $x$  svírá úhel  $\varphi$ . Na této polopřímce leží všechny body logaritmické spirály, které jsou popsány úhlem  $\theta$  ve tvaru

$$\theta = \varphi + 2\pi k, \quad [43]$$

kde  $k$  je přirozené číslo (to již bylo vysvětleno v kapitole 2.1). Pokud jsou opět podle hodnoty  $k$  označeny tyto body jako  $M_k$ , pak pro bod  $M_0$  platí

$$\theta = \varphi + 2\pi \cdot 0 = \varphi, \quad [44]$$

$$r = ae^{b\theta} = ae^{b\varphi}. \quad [45]$$

Pro bod  $M_1$  poté platí

$$\theta = \varphi + 2\pi \cdot 1 = \varphi + 2\pi, \quad [46]$$

$$r = ae^{b\theta} = ae^{b(\varphi+2\pi)} = ae^{b\varphi} \cdot ae^{2\pi b} \quad [47]$$

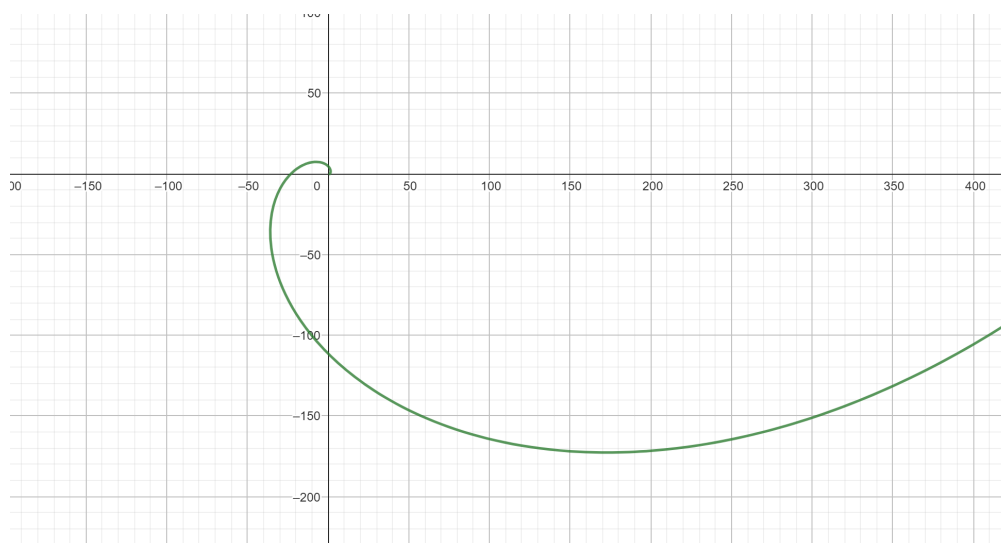
a pro bod  $M_2$  platí

$$\theta = \varphi + 2\pi \cdot 2 = \varphi + 4\pi, \quad [48]$$

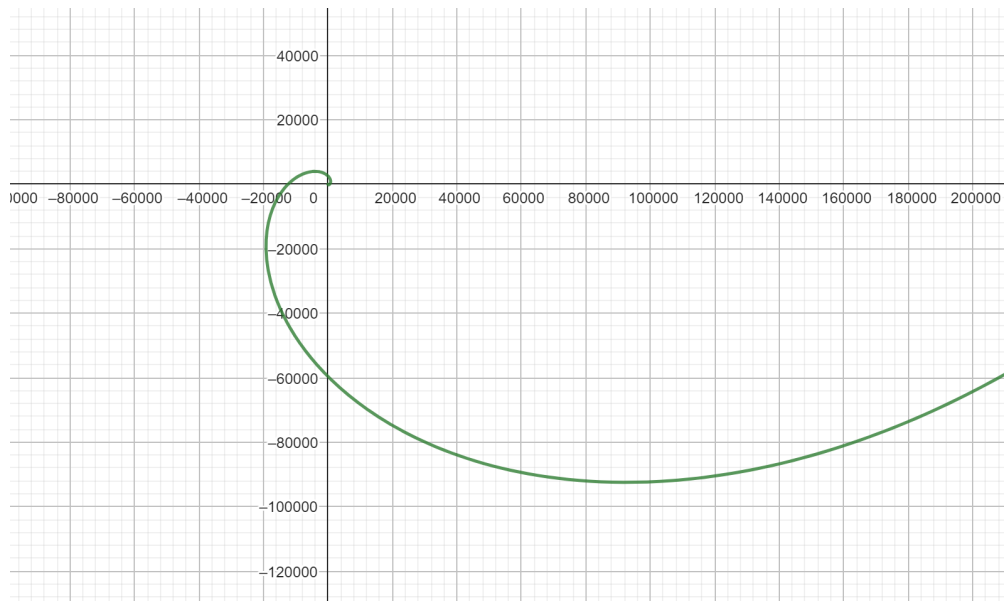
$$r = ae^{b\theta} = ae^{b(\varphi+4\pi)} = ae^{b\varphi} \cdot ae^{4\pi b} = ae^{b\varphi} \cdot (ae^{2\pi b})^2. \quad [49]$$

Zatímco u Archimédovy spirály bylo možné vypočítat vzdálenost  $r$  následujícího bodu na polopřímce přičtením konstanty ke vzdálenosti předchozího bodu, u logaritmické spirály je možné tuto vzdálenost získat vynásobením předchozí hodnoty  $r$  neměící se konstantou (konkrétně  $ae^{2\pi b}$ ). Toto pravidlo opět platí pro libovolnou logaritmickou spirálu a libovolně zvolenou polopřímku (FA ČVUT, 2017, s. 9).

Další vlastností logaritmické spirály je tzv. soběpodobnost. Tu lze nejlépe vysvětlit pomocí dvojice obrázků 10 a 11. Na obrázku 10 se nachází logaritmická spirála s předpisem  $r(\theta) = e^\theta$ . Na obrázku 11 se poté nachází stejná spirála, pohled na ní je ale výrazně oddálen (to je možné poznat podle hodnot na číselných osách, které jsou větší). Lze si všimnout, že tyto dva obrázky jsou téměř shodné, což znamená, že logaritmická spirála má při libovolném oddálení pořád stejný tvar (FA ČVUT, 2017, s. 9).



Obrázek 10: Logaritmická spirála s předpisem  $r(\theta) = e^\theta$  (autor, 2023)



Obrázek 11: oddálený pohled na logaritmickou spirálu s předpisem  $r(\theta) = e^\theta$  (autor, 2023)

### 2.3.1 Konstrukce

Konstrukce logaritmické spirály začíná stejným způsobem jako konstrukce Archimédovy spirály: úhel  $2\pi$  okolo počátku soustavy souřadnic je pomocí polopřímek rozdělen na stejně velké části. Pokud je například zvoleno polopřímek 8, pak tyto polopřímky svírají s osou  $x$  po řadě úhly

$$\theta_0 = 0, \quad [50]$$

$$\theta_1 = \frac{2\pi}{8} = \frac{\pi}{4}, \quad [51]$$

$$\theta_2 = 2 \cdot \frac{2\pi}{8} = \frac{\pi}{2}, \quad [52]$$

$$\theta_3 = 3 \cdot \frac{2\pi}{8} = \frac{3\pi}{4}, \quad [53]$$

$$\theta_4 = 4 \cdot \frac{2\pi}{8} = \pi \quad [54]$$

atd. Pro vzdálenosti  $r$  bodů ležících na těchto polopřímkách poté platí

$$r_0 = a, \quad [55]$$

$$r_1 = ae^{\frac{b\pi}{4}}, \quad [56]$$

$$r_2 = ae^{\frac{b\pi}{2}}, \quad [57]$$

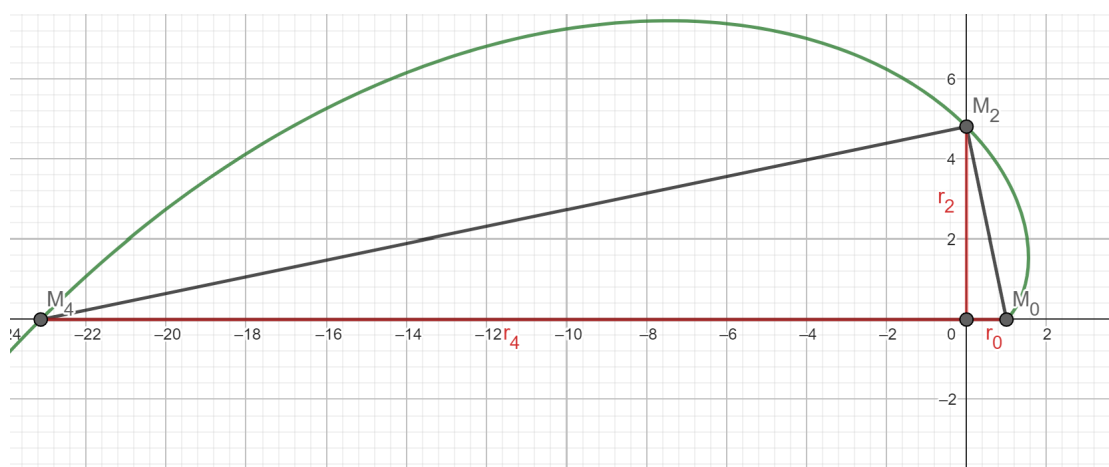
$$r_3 = ae^{\frac{3\pi}{4}}, \quad [58]$$

$$r_4 = ae^{b\pi} \quad [59]$$

atd. Nyní si lze všimnout, že pro součin hodnot  $r_0$  a  $r_4$  platí

$$r_0 r_4 = a \cdot ae^{b\pi} = a^2 e^{2 \cdot b\frac{\pi}{2}} = (ae^{b\frac{\pi}{2}})^2 = r_2^2, \quad [60]$$

tj. tento součin je roven druhé mocnině hodnoty  $r_2$ . Pokud je bod popsán úhlem  $\Theta_0$  a vzdáleností  $r_0$  označen jako  $M_0$  a obdobně jsou zaznačeny body  $M_2$  a  $M_4$ , tvoří tyto tři body trojúhelník (viz obrázek 12). Vzdálenost  $r_2$  je v tomto případě výškou na stranu  $M_0M_4$ , kterou dělí na dvě části o délkách  $r_0$  a  $r_4$ . Pokud ale platí vztah [60], pak pro daný trojúhelník platí Euklidova věta o výšce, tj. je pravoúhlý s pravým úhlem u vrcholu  $M_2$ . Toho lze při konstrukci využít – výpočtem stačí zjistit polohu bodů  $M_0$  a  $M_2$ , bod  $M_4$  poté stačí doplnit tak, aby výsledný trojúhelník složený z těchto bodů byl pravoúhlý. Vztah [60] neplatí pouze pro uvedené body, stejným způsobem ho lze odvodit i pro další trojice bodů ležící na logaritmické spirále (Jarešová a Zhouf, 2009, s. 11).



Obrázek 12: body  $M_0$ ,  $M_2$  a  $M_4$  na logaritmické spirále (autor, 2023)

## 2.4 Zlatá spirála

Před odvozením zlaté spirály je nejdříve třeba představit pojem zlatý řez. Ten bývá nejčastěji definován pomocí následující situace: Úsečka má být rozdělena na dvě části o délkách  $a$  a  $b$ , kde  $a > b$ . Přitom má být dodržena podmínka, že poměr  $a : b$  má být stejný jako poměr délky původní úsečky ku délce  $a$ , tj.  $(a + b) : a$ . To znamená, že má platit rovnost

$$\frac{a+b}{a} = \frac{a}{b}. \quad [61]$$

Tuto rovnici lze upravit do tvaru

$$1 + \frac{b}{a} = \frac{a}{b}. \quad [62]$$

Pokud je nyní poměr  $a : b$  označen jako  $\varphi$ , musí platit

$$1 + \frac{1}{\varphi} = \varphi. \quad [63]$$

Úpravou vzniká kvadratická rovnice

$$\varphi^2 - \varphi - 1 = 0. \quad [64]$$

Tato rovnice má dvě řešení, přičemž jedno je kladné, druhé záporné. Vzhledem k tomu, že je  $\varphi$  poměr délek, dává smysl zvolit kladné řešení, které je

$$\varphi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \doteq 1,618. \quad [65]$$

Pokud tedy má být splněna daná podmínka, musí být poměr  $a : b$  roven  $\varphi$ , tj. cca 1,618 : 1. Hodnota  $\varphi$  se nazývá zlatý řez a v matematice se jedná o významnou konstantu (Chmelíková, 2006, s. 8).

Zlatá spirála je v polárních souřadnicích daná rovnicí

$$r(\theta) = \varphi^{\frac{2\theta}{\pi}}, \quad [66]$$

Kde  $\varphi$  je zlatý řez. Parametricky ji lze poté vyjádřit jako

$$x = \varphi^{\frac{2t}{\pi}} \cos t, \quad [67]$$

$$y = \varphi^{\frac{2t}{\pi}} \sin t. \quad [68]$$

Lze si všimnout, že rovnici [66] je možné získat z předpisu pro logaritmickou spirálu (rovnice [36], viz kapitola 2.3) při volbě  $a = 1$  a konstanty  $b$  ve tvaru

$$b = \frac{2 \ln \varphi}{\pi}. \quad [69]$$

Zlatá spirála je tak ve skutečnosti speciální případ logaritmické spirály. To znamená, že má všechny její vlastnosti a je možné ji konstruovat způsobem zmíněným v kapitole 2.3.1.

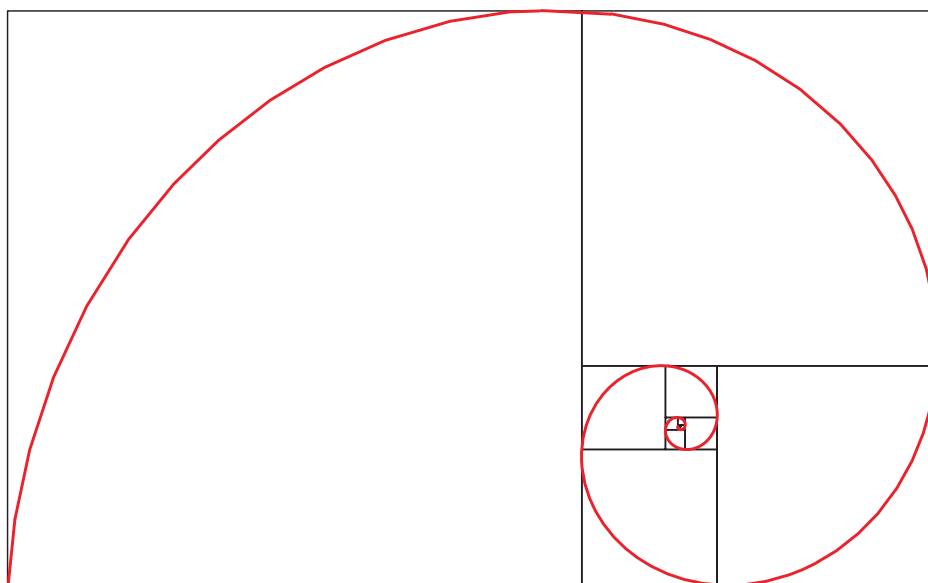
Pro zlatou spirálu konkrétně ale zároveň existují aproximace – křivky, které se svým tvarem zlaté spirále podobají, zároveň ale mají jednodušší způsob konstrukce (FA ČVUT, 2017, s. 10).

### 2.4.1 Aproximace zlaté spirály

První možností, jak aproximovat zlatou spirálu, je pomocí zlatého obdélníku. Obdélník je nazván zlatým, pokud pro poměr délek jeho stran platí  $a : b = \varphi$ , tj.  $a = b\varphi$ . Tento obdélník lze vždy rozdělit na čtverec o straně  $b$  a obdélník o stranách délky  $(a - b)$  a  $b$ . Pro poměr těchto délek platí

$$\frac{b}{a-b} = \frac{b}{b\varphi-b} = \frac{1}{\varphi-1} = \varphi. \quad [70]$$

Platnost posledního kroku úpravy lze získat z rovnice [64], která pro hodnotu  $\varphi$  platí. Z rovnice [70] vyplývá, že výsledný obdélník vzniklý oddělením čtverce o straně  $b$  od zlatého obdélníku je také zlatý obdélník. Je možné ho tak znovu rozdělit na čtverec a další zlatý obdélník. Tento krok jde neustále opakovat, přičemž se rozměry výsledných čtverců a zlatých obdélníků postupně zmenšují. Do každého vzniklého čtverce lze poté vepsat čtvrtkruh se středem v jednom z jeho vrcholů. Pokud jsou tyto vrcholy vhodně zvoleny (viz obrázek 13), vznikne spojením těchto kružnic křivka. Tato křivka se svým tvarem podobá zlaté spirále, jedná se tak o její aproximaci (FA ČVUT, 2017, s. 11).



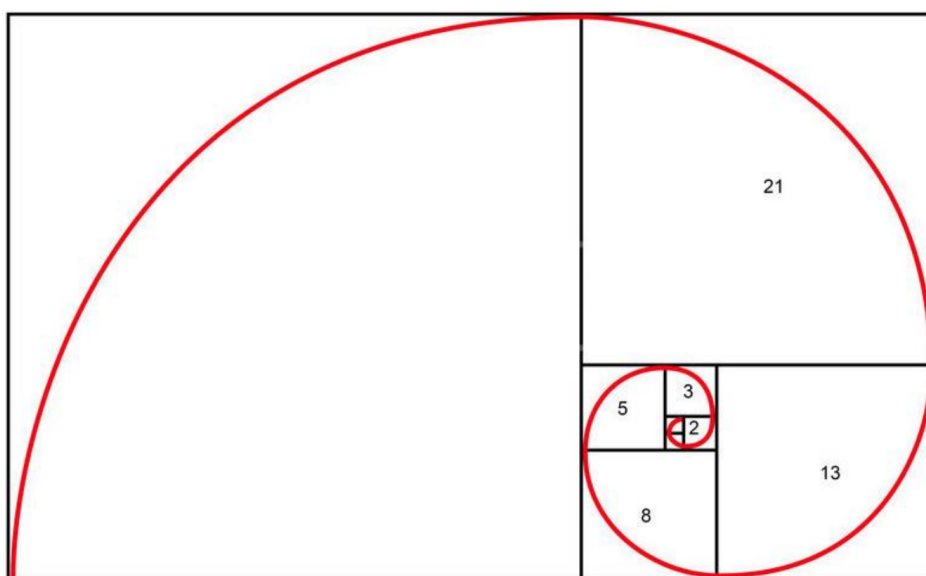
Obrázek 13: Aproximace zlaté spirály pomocí zlatých obdélníků

(Zdroj: <https://mathworld.wolfram.com/GoldenSpiral.html>)

Další možností, jak lze zlatou spirálu aproximovat, je pomocí tzv. Fibonacciho spirály. Ta vychází z Fibonacciho posloupnosti, ve které je každý člen dán součtem dvou předchozích členů, přičemž první dva členy jsou rovny 1. Formálně lze tuto posloupnost zapsat tak, že pro všechny její členy platí

$$a_n = a_{n-1} + a_{n-2}, \quad [71]$$

kde  $a_1 = a_2 = 1$ . První členy posloupnosti tím pádem jsou 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144... atd. Konstrukce Fibonacciho spirály pak vypadá následovně: nejprve jsou zkonstruovány dva čtverce o délce strany 1 tak, že spolu sdílejí jednu stranu. Tím vznikne obdélník o stranách délky 1 a 2. Nyní lze zkonstruovat čtverec o straně 2 tak, že jedna z jeho stran splývá s delší stranou daného obdélníku. Tím vznikne obdélník o stranách délky 2 a 3. Postup je poté opakován – je vždy zkonstruován čtverec tak, že jedna z jeho stran splývá s delší stranou obdélníku, čímž vznikne obdélník nový. Lze si všimnout, že délky stran zkonstruovaných čtverců odpovídají členům Fibonacciho posloupnosti, tj. první dva čtverce měly strany délky 1, třetí poté délky 2, čtvrtý délky 3 atd. Do každého čtverce lze nyní stejně jako u předchozí aproximace vepsat čtvrtkruh se středem v jednom z jeho vrcholů. Při správné volbě těchto vrcholů vzniká Fibonacciho spirála (viz obrázek 14), která je svým tvarem podobná zlaté spirále. Opět se tak jedná o její aproximaci (FA ČVUT, 2017, s. 13).



Obrázek 14: Zkonstruovaná Fibonacciho spirála

(Zdroj: <https://alenasolcova.cz/wp-content/uploads/2020/09/Fibonacciho-posloupnost-8.pdf>)

Ačkoliv není spojitost mezi zlatou spirálou a Fibonacciho spirálou na první pohled zřejmá, lze ji poměrně snadno ukázat. Zmíněné obdélníky, které při konstrukci Fibonacciho spirály



vznikají, mají vždy délky stran rovné dvěma po sobě jdoucím členům Fibonacciho posloupnosti (první obdélník měl strany o délce 1 a 2, další 2 a 3 atd.). Poměr mezi těmito dvěma hodnotami má zajímavou vlastnost. Například poměr mezi čtvrtým a třetím členem posloupnosti je

$$\frac{a_4}{a_3} = \frac{3}{2} = 1,5. \quad [72]$$

Na této hodnotě není nic zvláštního. Pokud je ale vypočten poměr mezi osmým a sedmým členem, je výsledek

$$\frac{a_8}{a_7} = \frac{21}{13} \doteq 1,615. \quad [73]$$

Lze si všimnout, že je tato hodnota velmi blízko hodnotě zlatého řezu  $\varphi \doteq 1,618$ . Poměr mezi desátým a devátým členem je poté

$$\frac{a_{10}}{a_9} = \frac{55}{34} \doteq 1,618. \quad [74]$$

Tato hodnota odpovídá zlatému řezu na čtyři desetinná místa. Poměr mezi dvěma po sobě jdoucími členy Fibonacciho posloupnosti se tak postupně blíží hodnotě zlatého řezu. To znamená, že obdélníky využívané při konstrukci Fibonacciho spirály se s rostoucí velikostí stran čím dál tím více podobají zlatým obdélníkům. Fibonacciho spirála je tím pádem téměř shodná se spirálou, která vznikne aproximací zlaté spirály pomocí zlatých obdélníků (FA ČVUT, 2017, s. 13).

## 2.5 Fermatova spirála

Fermatova spirála je pojmenována po francouzském matematikovi Pierru de Fermatovi (1607–1665), který ji v roce 1636 jako první popsal. V polárních souřadnicích má předpis

$$r(\theta) = a\sqrt{\theta}, \quad [75]$$

kde  $a$  je libovolné kladné číslo. Parametrické vyjádření je poté

$$x = a\sqrt{t}\cos t, \quad [76]$$

$$y = a\sqrt{t}\sin t. \quad [77]$$

Někdy bývá polární předpis Fermatovy spirály také zapisován ve tvaru

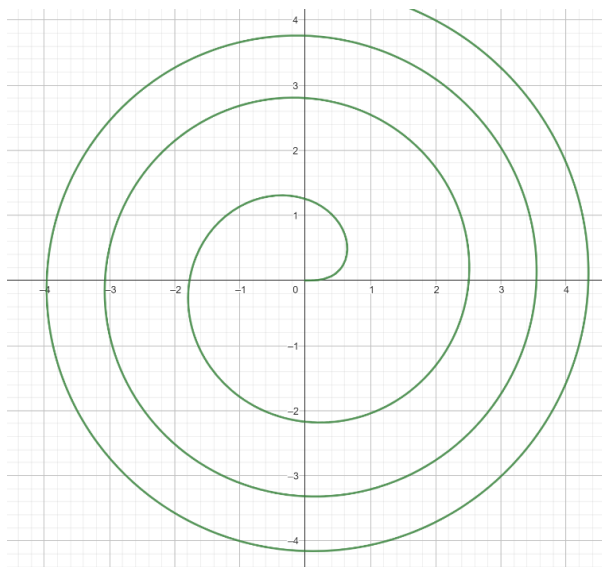
$$r(\theta)^2 = a\theta, \quad [78]$$

který vzniká umocněním rovnice [75]. Je třeba si ale uvědomit, že tyto dvě rovnice nejsou ekvivalentní. Zatímco rovnice [75] přiřazuje každému úhlu vždy jednu hodnotu  $r$ , v rovnici [78] existují pro každý úhel dvě odpovídající hodnoty  $r$ . Konkrétně se jedná o hodnoty:

$$r = a\sqrt{\theta}, \quad [79]$$

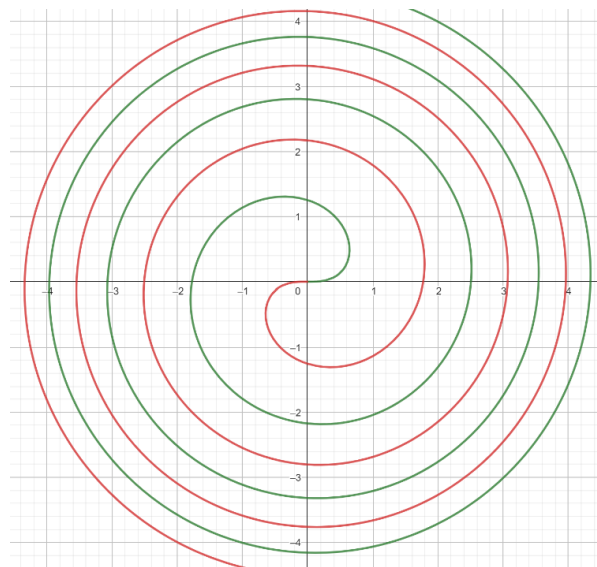
$$r = -a\sqrt{\theta}. \quad [80]$$

Záporná hodnota  $r(\theta)$  se řeší tak, že je tato vzdálenost nanesena na polopřímku opačnou k té, která svírá s osou  $x$  úhel  $\theta$ . Body popsané rovnicemi [79] a [80] jsou tak vždy středově souměrné podle počátku soustavy souřadnic. To znamená, že zatímco využitím rovnice [75] vznikne jednoduchá spirála (viz obrázek 15), při použití rovnice [78] vznikne spirála, která je složená ze dvou těchto jednoduchých spirál (viz obrázek 16). Tyto dvě jednoduché spirály jsou středově souměrné podle počátku soustavy souřadnic; jedna z nich má koeficient roven  $a$ , druhá poté  $-a$  (Jarešová a Volf, 2007).



Obrázek 15: Fermatova spirála s předpisem

$$r(\theta) = \sqrt{\theta} \quad (\text{autor, 2023})$$



Obrázek 16: Fermatova spirála s předpisem

$$r(\theta)^2 = \theta \quad (\text{autor, 2023})$$

### 2.5.1 Konstrukce

Pro Fermatovu spirálu neexistuje žádný speciální způsob konstrukce. Je tak nutné použít metodu zmíněnou v kapitole 2.1.1, tj. dopočítat hodnoty  $r$  a následně je nanést na příslušící polopřímky. Pro vzdálenosti mezi sousedními body na polopřímce ale neexistuje žádný vztah, který by konstrukci zjednodušil, je tak třeba zjišťovat polohu každého bodu zvlášť. Pokud je konstruována spirála popsána rovnicí [78], je možné využít faktu, že se skládá ze dvou spirál středově souměrných podle počátku soustavy souřadnic. Stačí tak pomocí polopřímek zkonstruovat pouze jednu z nich a druhou konstruovat právě pomocí středové souměrnosti (Jarešová a Zhouf, 2009, s.14–15).

## 2.6 Lituuova spirála

Tuto spirálu poprvé popsal již zmíněný matematik Roger Cotes, jako Lituuovu spirálu ji ale označil až skotský matematik Colin Maclaurin (1698–1746). Název je odvozen od latinského slova *lituus*, které v antickém Římě označovalo speciální typ hole se zatočeným koncem (viz příloha 1). Lituuova spirála se svým tvarem této holi podobá, což vysvětluje její pojmenování (Jarešová a Zhouf, 2009, s. 7).

Lituuova spirála je v polárních souřadnicích popsána rovnicí

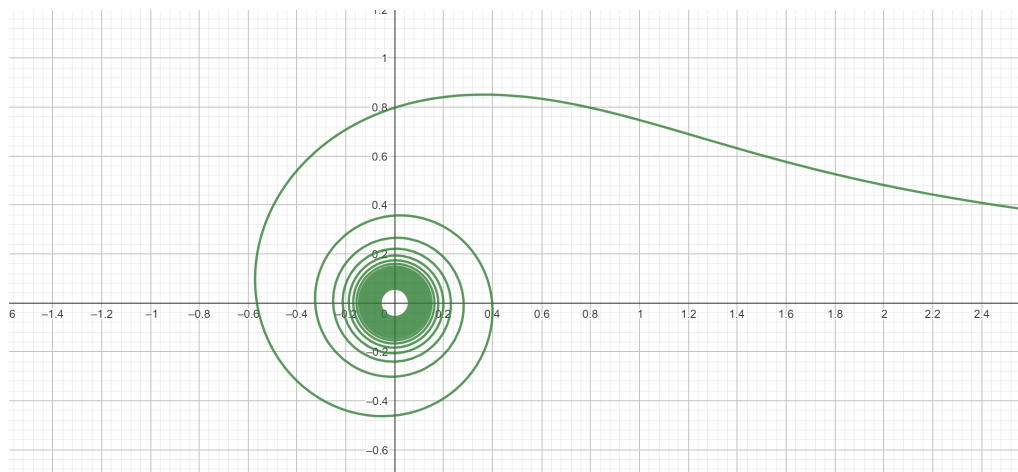
$$r(\theta) = \frac{a}{\sqrt{\theta}}, \quad [81]$$

kde  $a$  je libovolné kladné číslo. Parametricky je poté možné spirálu vyjádřit jako

$$x = \frac{a}{\sqrt{t}} \cos t, \quad [82]$$

$$y = \frac{a}{\sqrt{t}} \sin t. \quad [83]$$

Lituuova spirála má předpis v polárních souřadnicích podobný hyperbolické spirále, sdílí tak některé její vlastnosti: s rostoucím úhlem  $\theta$  přibližuje ke svému pólu, který je ale jejím asymptotickým bodem, tj. nikdy ho nedosáhne (viz obrázek 17). To je opět způsobeno tím, že pro žádnou hodnotu  $\theta$  nemůže platit  $r(\theta) = 0$  (Jarešová a Volf, 2007).



Obrázek 17: Lituova spirála pro  $a = 1$  a  $t \in \langle 0; 300 \rangle$  (autor, 2023)

Podobně jako u Fermatovy spirály je někdy polární předpis Lituovy spirály zapisován ve tvaru

$$r(\theta)^2 = \frac{a}{\theta}. \quad [84]$$

Při využití tohoto tvaru je opět výsledná spirála složená ze dvou spirál popsaných rovnicí [81], které jsou středově souměrné podle počátku soustavy souřadnic (Jarešová a Volf, 2007).

### 2.6.1 Konstrukce

Pro Lituovu spirálu opět neexistuje žádný speciální způsob konstrukce. Jedinou možností je (stejně jako u Fermatovy spirály) využít postupu zmíněného v kapitole 2.1.1., tj. dopočítat podle polárního předpisu spirály vzdálenosti  $r$  konkrétních bodů a následně tyto body zkonstruovat.

### 3 VÝSKYT A VYUŽITÍ MATEMATICKÝCH SPIRÁL

Stejně jako další matematické křivky je možné potkat i spirály v reálném světě. Přirozeně se vyskytují v přírodě, kde mají jejich tvar některé rostliny, části živočichů a další objekty. V technice mají tvar spirály mnohé součástky a přístroje. V této kapitole jsou uvedeny konkrétní příklady výskytu a využití matematických spirál, které jsou v přílohách doplněny fotografiemi.

#### 3.1 Výskyt spirál v přírodě

Několik příkladů výskytu spirál lze najít u rostlin. Například kapradiny jsou během růstu stočené do tvaru spirály (viz příloha 2), ze kterého se postupně narovnávají. Do spirály mohou být zatočeny i úponky popínavých rostlin, pomocí kterých se přichytávají k povrchům (viz příloha 3). Dále lze tento tvar pozorovat u šišek, kde jsou do spirál uspořádány jednotlivé šupiny, ze kterých se šiška skládá (viz příloha 4). Velice často se poté spirály vyskytují v květech, kde mohou do tohoto tvaru být uspořádány okvětní lístky (viz příloha 5), tyčinky a pestíky (Beneš, 2007, s. 22-24).

Pravděpodobně nejvíce studovaným případem výskytu spirál v přírodě jsou květy slunečnice, kde jsou semena uspořádána do tvaru logaritmických spirál (viz přílohy 6 a 7). Zajímavostí je, že počet těchto spirál téměř vždy odpovídá nějakému členu z Fibonacciho posloupnosti; nejčastěji se jedná o 55 spirál, přičemž 21 z nich obíhá střed květu ve směru hodinových ručiček a 34 proti směru hodinových ručiček (to je opět zajímavá shoda, neboť tato dvě čísla jsou po sobě jdoucí členy Fibonacciho posloupnosti). Ohledně vysvětlení tohoto jevu se dlouho vedly diskuze, dnes se předpokládá, že se díky tomuto uspořádání vejde do květu slunečnice nejvíce semen (Jarešová a Volf, 2007; Zdeborová, 2007, s. 9-10).

Tvar spirály lze nalézt i u některých živočichů. Nejčastěji uváděným příkladem jsou ulity měkkýšů, které mají tvar podobný logaritmické spirále (viz příloha 8). Stejný tvar pak mají i schránky některých hlavonožců, například loděnek (viz přílohy 9 a 10). Do tvaru spirály jsou také často uspořádána vlákna na pavučině (viz příloha 11). Spirály se zároveň u živočichů vyskytují ve formě trajektorie. Například bylo zjištěno, že se po spirále často pohybují mouchy, když se přibližují ke světelnému zdroji (Beneš, 2007, s. 25; Jarešová a Zhouf, 2009, s. 6).

Kromě zmíněných příkladů mají tvar spirály i další objekty. Například okolo cyklón, tj. tlakových níží, proudí vítr vlivem rotace Země po spirále, což může být viditelné z vesmíru (viz příloha 12). Tvar spirály mají i některé galaxie – může se jednat o tzv. spirální galaxie (viz příloha 13) nebo spirální galaxie s příčkou (viz příloha 14). Mezi spirální galaxie s příčkou patří například Mléčná dráha, ve které se nachází Sluneční soustava (Voráčková a kol., 2012, s. 134).

## 3.2 Využití spirál

Spirály se často využívají v technice. Prvním příkladem takového využití mohou být gramofonové desky. Do gramofonových desek je zvuková informace zaznamenána tak, že je do nich vyryta drážka (viz příloha 15). Tato drážka má téměř vždy tvar Archimédovy spirály, díky čemuž je možné na kruhovou desku zaznamenat co nejdelší lineární informaci. Tuto informaci je pak schopný přečíst hrot gramofonu, který ji následně převádí na zvuk (Revenda, 2009).

Dalším příkladem využití je spirální kompresor. Ten se skládá z komory, uvnitř které jsou dvě kovové spirály (viz příloha 16). Tyto spirály jsou do sebe zasunuty, přičemž jedna z nich je pohyblivá, druhá nepohyblivá. Při provozu kompresoru se vzájemným pohybem spirál cyklicky zvětšuje a zmenšuje mezera mezi nimi. Tím dochází ke stlačování vzduchu, který se v této mezeře nachází. Stlačený vzduch je poté odveden mimo komoru se spirálami a může být dále využit (Atlas Copco, 2022).

Tvar spirály může mít dále mnoho dalších předmětů: antény, větrné turbíny, topná tělesa a další. U některých případů nemusí být spirálový tvar na první pohled zřejmý – například rotující nože mají často tvar logaritmické spirály, jedná se ale pouze o její krátký úsek, který jako spirála nepůsobí (Voráčková a kol., 2012, s. 134).

Často se lze se spirálami setkat v architektuře a designu. Už v antickém Řecku se tento tvar využíval na dekoraci domů a sloupů (viz příloha 17). Zde se často využívalo Lituuovy spirály – s tou je možné se dodnes setkat u smyčcových nástrojů (viz příloha 18), kde má její tvar tzv. krk nástroje. Své využití mají spirály ale i v architektuře moderní – příkladem může být muzeum hodinek Audemars Piguet ve Švýcarsku (viz příloha 19). Tato budova má celá tvar spirály, což je dobře vidět při pohledu shora (Jarešová a Volf, 2007; FA ČVUT, 2017, s. 15).

## 4 PRAKTICKÁ ČÁST: PRACOVNÍ LIST A VÝUKOVÉ HODINY

Praktická část projektu se zabývá přípravou pracovního listu a výukových hodin na téma matematické spirály. Cílem praktické části je během výukových hodin představit téma studentům z vybraných tříd Doctriny – Podještědského gymnázia a na základě těchto hodin zhodnotit přístup studentů k tématu a přínos pro studenty. V kapitole jsou nejdříve pospány všechny použité výukové materiály – pracovní list, prezentace a zpětná vazba. Další část kapitoly se věnuje odučeným výukovým hodinám a výsledkům získaným ze zpětné vazby. Poslední částí je diskuze a zhodnocení praktické části projektu.

### 4.1 Pracovní list

Pracovní list je oboustranný a obsahuje celkem 4 cvičení (viz přílohy 20 a 21). Tématem pracovního listu je obecný popis spirál a základní typy spirál, tj. obsahově odpovídá kapitolám 1 a 2 projektu. Student by na základě něj měl pochopit definici spirály, její popis v polárních a kartézských souřadnicích a pojem pól spirály. Dále by měl být seznámen se základními typy matematických spirál a jejich specifickými vlastnostmi.

První úkol v pracovním listu se zabývá konstrukcí Archimédovy spirály. Využit je zde způsob konstrukce popsáný v kapitole 2.1.1, tj. konstrukce pomocí polopřímek (v tomto případě je jich 8). Pro urychlení je v pracovním listu již předpřipravená kartézská soustava souřadnic i se všemi potřebnými polopřímkami (u každé polopřímky je také uveden úhel, který svírá s osou  $x$ ), stačí tak pouze správně zkonstruovat všechny zadané body. K tomu slouží tabulka pod soustavou souřadnic – v té jsou pro všechny body  $M_0$  až  $M_{12}$ , které má student zkonstruovat, uvedeny příslušné hodnoty  $r$  a  $\theta$ . Správným určením poloh všech bodů student ukáže, že rozumí tomu, co tyto dvě hodnoty znamenají. Pomocí zkonstruované spirály lze poté odvodit její obecnou definici, tj. že se jedná o křivku obíhající pevně daný bod, přičemž se od něj neustále vzdaluje.

Ve druhém úkolu má student spočítat poměr mezi hodnotami  $r$  a  $\theta$  pro čtyři různé body zkonstruované v prvním úkolu. Zde je využito faktu, že předpis Archimédovy spirály v polárních souřadnicích lze zapsat jako

$$\frac{r}{\theta} = a, \quad [85]$$

tj. tento poměr je pro všechny body ležící na dané spirále roven stejné hodnotě. Výsledkem všech poměrů v pracovním listu je  $2/\pi$ , z čehož lze odvodit, že pro všechny body na zkonstruované spirále platí

$$r = \frac{2}{\pi} \theta. \quad [86]$$

V této úloze je tak na základě konstrukce z úkolu 1 vysvětlen předpis spirály v polárních souřadnicích. Následně lze podobným způsobem jako v kapitole 1.3 odvodit popis spirály v kartézských souřadnicích a ukázat převod mezi kartézskými a polárními souřadnicemi.

Třetím úkolem je doplnění věty. Tato úloha slouží jako shrnutí všech doposud zjištěných informací o popisu spirál. Nejprve má student doplnit polární předpis zkonstruované spirály (ten byl odvozen v přechodí úloze), po vysvětlení pojmu pól spirály má poté určit, kde má daná spirála pól. Úkol poté přechází od obecného popisu spirál k základním typům – student je seznámen s tím, že zkonstruovaná spirála se nazývá Archimédova a její obecný předpis v polárních souřadnicích je  $r = a\theta$ . Po dokončení úkolu je možné Archimédovu spirálu více představit; například může být zmíněno, že mezi body spirály, které leží na jedné polopřímce, jsou vždy stejné vzdálenosti (to lze snadno ukázat na zkonstruované spirále).

Poslední úkol se zabývá dalšími typy spirál. Student zde má za úkol přiřadit k názvu spirály její polární předpis a správný obrázek. Představeny jsou zde hyperbolická spirála, logaritmická spirála, Fermatova spirála a Lituuova spirála. Stejně jako u Archimédovy spirály lze po dokončení úlohy všechny typy představit blíže, tj. zmínit jejich vlastnosti a případně i s nimi spojené významné matematiky.

Řešení pracovního listu by mělo být doplněno výkladem vyučujícího, který studenty navede k jeho správnému vyplnění a všechny získané poznatky dovysvětlí. Ve výkladu by zároveň měly zaznít další informace, kterým se pracovní list přímo nevěnuje (například převod mezi polárními a kartézskými souřadnicemi nebo specifické vlastnosti všech základních typů spirál). V jedné vyučovací hodině ale nelze probrat dostatečně podrobně všechna témata obsažená v kapitolách 1 a 2 projektu, některá z nich proto budou z obsahu výukové hodiny zcela vyřazena. Konkrétně se bude jednat o tato témata:

- konstrukce hyperbolické a logaritmické spirály (kapitoly 2.2.1 a 2.3.1);
- zlatá spirála a její aproximace (kapitola 2.4).



Konstrukce hyperbolické a logaritmické spirály budou vyřazeny především kvůli jejich časové náročnosti – vysvětlit jejich princip by zabralo významnou část hodiny, navíc by studenti neměli čas si je vyzkoušet. Seznámení budou pouze s konstrukcí Archimédovy spirály, pomocí které lze ale případně zkonstruovat i jakýkoli jiný typ spirály. Z důvodu časové náročnosti bude poté vyřazena i kapitola o zlaté spirále. Ze všech typů spirál je vyřazení zlaté spirály nejsmysluplnější vzhledem k tomu, že se jedná pouze speciální případ logaritmické spirály, nikoliv o zcela samostatný druh.

## 4.2 Prezentace

Dalším podkladem pro výukovou hodinu je prezentace. Ta se zabývá výskytem a využitím matematických spirál, tj. obsahově odpovídá kapitole 3 projektu. Není v ní žádný text, jedná se pouze o výběr z obrázků, které se nachází v přílohách. Na hodinách bude prezentace promítnuta a stejně jako pracovní list bude doplněna výkladem, ve kterém budou všechny obrázky vysvětleny a popsány. Studentům by tak měly být představeny konkrétní případy výskytu spirál v přírodě a jejich využití v praxi. Finální verze prezentace se nachází v přílohách (viz příloha 22).

## 4.3 Zpětná vazba

Posledním podkladem pro výuku spirál je zpětná vazba, kterou dostanou studenti k vyplnění na konci výukové hodiny. Jedná se o krátký dotazník, jehož cílem je zjistit názor studentů, kteří výukovou hodinu absolvovali, na téma matematických spirál. Celkově sestává ze čtyř otázek:

1. Jak moc byl pro vás výklad srozumitelný?
2. Jak moc vám přišlo téma matematických spirál zajímavé?
3. Jak moc vám přijde toto téma přínosné (přijdou vám získané informace užitečné)?
4. Myslíte, že by mělo význam zařadit matematické spirály do standardních hodin matematiky na středních školách?

Na otázky 1-3 odpovídají studenti číselným hodnocením na stupnici 1-5, kde 1 je nejlepší a 5 nejhorší. U poslední otázky poté mají výběr mezi možnostmi „ano“ a „ne“. V případě, že by student chtěl v rámci dotazníku vyjádřit ještě další názor nebo poznatek, má možnost ho

napsat pod otázky. Zpětná vazba je vytvořena tak, aby jejím vyplňováním nestrávili studenti zbytečně mnoho času a bylo možné ji vyplnit v rámci výukové hodiny. Použitá verze zpětné vazby se opět nachází v přílohách (viz příloha 23).

#### **4.4 Odučené výukové hodiny**

V rámci projektu byly odučeny celkem dvě různé výukové hodiny, obě o standardní délce jedné vyučovací hodiny (45 minut). První hodiny se zúčastnili studenti septimy, tj. sedmého ročníku osmiletého gymnázia (odpovídá třetímu ročníku střední školy). V septimě jsou hodiny matematiky povinné pro všechny studenty, výukové hodiny o spirálách se tak zúčastnila celá třída. Druhá výuková hodina byla připravena pro studenty oktávy a IV. ročníku, tj. pro maturitní ročníky osmiletého a čtyřletého gymnázia. V těchto třídách je již matematika nepovinná, hodiny se tak zúčastnili pouze studenti, kteří ji mají zvolenou jako volitelný předmět.

Tyto třídy byly vybrány vzhledem k obsahu výukové hodiny. Pro správné pochopení matematických spirál je potřeba, aby studenti měli dostatečné znalosti matematiky. Především by měli znát měření úhlu v radiánech, také by ale měli mít zkušenosti s funkcemi. V nižších ročnících gymnázia by tyto znalosti studenti mít nemuseli, což by výukovou hodinu značně zkomplikovalo. Vybrány proto byly nejvyšší ročníky gymnázia, ve kterých by studenti měli vše potřebné již znát.

Výukové hodiny v septimě se zúčastnilo celkem 17 studentů, hodiny pro oktávu a IV. ročník se poté zúčastnilo 10 studentů. Všichni studenti byli po skončení výkladu požádáni, aby vyplnili již zmíněnou zpětnou vazbu. Jejich odpovědi jsou zaznamenané v tabulkách 1 a 2; tabulka 1 obsahuje odpovědi studentů septimy, tabulka 2 odpovědi studentů oktávy a IV. ročníku. V každém řádku je nejdříve číslo otázky, poté je u každé možné odpovědi uveden počet studentů, kteří tuto odpověď označili.

Tabulka č. 1: Výsledky zpětné vazby ze třídy septima

Otázka č.	1	2	3	4	5
1	12	5	0	0	0
2	8	6	2	1	0
3	6	6	5	0	0
4	Ano: 16			Ne: 1	

Tabulka č. 2: Výsledky zpětné vazby ze tříd oktáva a IV. ročník

Otázka č.	1	2	3	4	5
1	9	1	0	0	0
2	7	2	1	0	0
3	2	5	2	0	1
4	Ano: 6			Ne: 4	

## 4.5 Diskuze

První otázka ve zpětné vazbě se týkala srozumitelnosti výkladu. U této otázky většina studentů zvolila hodnocení 1 (v septimě 12 z 17 studentů, v oktávě a IV. ročníku 9 z 10 studentů). Všichni zbylí studenti poté označili hodnocení 2, tj. žádné nižší hodnocení se ve zpětných vazbách neobjevilo. Z tohoto vyplývá, že při zvolené obtížnosti výkladu je téma matematických spirál pro studenty těchto ročníků dobře pochopitelné – tématu buď porozuměli zcela bez problémů, nebo pouze s menšími obtížemi. To se projevilo již při hodinách, během kterých studenti vyřešili všechny úlohy v pracovním listu samostatně nebo pouze s menší nápomocí, také reagovali na všechny položené dotazy. Původní předpoklad, že by téma nemuselo být pro nižší ročníky srozumitelné, by tak vzhledem k výsledkům nemusel být správný. Pochopení tématu by pro mladší studenty pravděpodobně bylo obtížnější, při vhodné úpravě by ale nejspíše bylo možné spirály vyučovat i v těchto třídách.

Ve druhé otázce měli studenti zhodnotit zajímavost výkladu. V septimě opět většina studentů zvolila hodnocení 1 nebo 2 (8 studentů zvolilo 1, 6 studentů zvolilo 2), ve třech případech poté studenti označili nižší hodnocení (2 studenti zvolili hodnocení 3, 1 student poté 4). V oktávě a IV. ročníku většina vybrala hodnocení 1 (7 studentů), nejnižší hodnocení poté bylo 3. Ačkoliv se v obou třídách objevili studenti, kterým téma nepřišlo příliš zajímavé, většina studentů i v tomto případě zvolila vysoké hodnocení. Z celého obsahu hodiny pravděpodobně přispěla zajímavosti výkladu nejvíce prezentace na téma výskyt a využití spirál. Ta umožnila studentům pochopit souvislost mezi teoretickým popisem spirál, kterým se zabýval pracovní list, a reálným světem. Na příkladu květu slunečnice například bylo možné ukázat, jak lze díky matematickému popisu spirál popsat a vysvětlit některé přírodní jevy. Obsah prezentace tak tvoří důležitou součást celého tématu, proto mu byla věnována významná část obou výukových hodin (v obou případech cca 12 minut).

Třetí otázka se studentů dotazovala na užitečnost a přínosnost získaných informací. Zde jsou již výsledky zpětné vazby méně jednoznačné – v septimě zvolilo 6 studentů hodnocení 1, 6 studentů hodnocení 2 a 5 studentů hodnocení 3. V oktávě a IV. ročníku zvolila polovina studentů hodnocení 2, hodnocení 1 a 3 zvolili v obou případech 2 studenti, v jednom případě se zde objevilo hodnocení 5. Názory studentů na přínos tématu se tak hodně liší, téměř nikdo ho ale nevnímá jako zcela zbytečné. Nižší hodnocení jsou u této otázky pravděpodobně způsobena špatnou využitelností spirál v praxi – znalost matematického popisu a základních druhů spirál lze při řešení praktických úloh využít jen velmi obtížně, využitelné nejsou tyto poznatky ani v reálném životě. Vysoká hodnocení mohou být naopak způsobena faktem, že lze pomocí spirál představit a zopakovat několik různých matematických témat najednou. Například je možné pomocí nich dobře představit polární souřadnice, porovnat je z kartézskými souřadnicemi a vysvětlit jejich výhody (u spirál je například patrné, že jsou jejich rovnice v polárních souřadnicích jednodušší než při parametrickém vyjádření pomocí kartézských souřadnic). Dále je možné pomocí spirál zopakovat některé funkce – například u hyperbolické spirály lze poukázat na podobnosti mezi touto křivkou a hyperbolou. Také toto téma umožňuje zopakovat úpravy výrazů a rovnic, v tomto případě je vhodným cvičením například vyjádření úhlu  $\theta$  z rovnice logaritmické spirály (viz kapitola 2.3) nebo ukázání rozdílu mezi dvěma různými polárními předpisy Fermatovy spirály (viz kapitola 2.5).

V poslední otázce měli studenti rozhodnout, zda by podle nich mělo význam zařadit téma matematických spirál mezi témata standardně probíraná v hodinách matematiky na střední

škole. Možnost „ano“ v tomto případě zvolilo 16 z 17 studentů septimy a 6 z 10 studentů oktávy a IV. ročníku. Většina studentů by tak se zařazením spirál do výuky souhlasila. Výsledky této otázky korespondují s výsledky všech předchozích otázek – většina studentů volila u prvních tří otázek spíše vyšší hodnocení, tj. 1 nebo 2. Někteří ze studentů poté volili i nižší hodnocení, nicméně se jednalo menší část. I přes výsledky zpětné vazby je ale otázka zařazení spirál do středoškolských hodin matematiky diskutabilní. V rámci projektu se výukových hodin zúčastnilo celkem 27 studentů, což je pro získání zcela jednoznačných dat nedostačující. Pro směrodatnější výsledky by bylo nutné, aby se hodin zúčastnilo více lidí, vhodné by také bylo, aby se jednalo o studenty z různých typů středních škol. Další problém pak byl již zmíněn u třetí otázky zpětné vazby – matematické spirály nemají příliš velké praktické využití, vhodnější jsou spíše pro zopakování a lepší pochopení některých jiných témat z matematiky. Je tak otázkou, zda by mělo význam je do výukového plánu zařadit jako opakovací cvičení a kolik hodin by jim mělo být pro tyto účely případně věnováno.

## ZÁVĚR

Cílem teoretické části práce bylo představit matematické spirály, jejich základní typy, možné způsoby konstrukce, výskyt v přírodě a využití v praxi. V praktické části měl být vytvořen pracovní list na téma matematické spirály a během výukových hodin mělo být toto téma představeno studentům středních škol. Na základě odučených hodin měl být poté zhodnocen přístup studentů k tématu a přínos tématu pro studenty.

V teoretické části byla pomocí příkladové situace odvozena definice spirály, dále byl ukázán popis spirály pomocí polárních souřadnic a její vyjádření jako parametrické křivky. Bylo představeno celkem šest základních typů spirál, u každého z nich byly zmíněny specifické vlastnosti a způsoby konstrukce. Také byli zmíněni významní matematici, kteří se daným typem zabývali. Výskyt spirál v přírodě byl ukázán na konkrétních příkladech rostlin, živočichů a dalších objektů. Také bylo ukázáno využití spirál v technice a architektuře.

V praktické části projektu byl popsán vytvořený pracovní list společně s dalšími podklady pro výukovou hodinu, tj. prezentací a zpětnou vazbou. Všechny tyto podklady byly zároveň umístěny do příloh. Byly odučeny celkem 2 výukové hodiny, kterých se dohromady zúčastnilo 27 studentů Doctriny – Podještědského gymnázia (17 studentů septimy, 10 studentů oktávy a IV. ročníku). Z průběhu hodin a výsledků zpětné vazby vyplývá, že při vhodně zvolené obtížnosti je téma spirál pro studenty těchto ročníků bez problému pochopitelné – všechny úlohy pracovního listu řešili zcela samostatně nebo s menší nápomocí, také odpovídali na položené dotazy. Studenti téma vnímají jako zajímavé, na čemž pravděpodobně měla velký podíl prezentace o výskytu a využití spirál. Tato kapitola by tak neměla být při představování spirál vynechána.

Přínos tématu pro studenty je ale diskutabilní. Získané znalosti o spirálách a jejich typech studenti v praxi využijí jen velmi obtížně, význam má tak téma spíše jako opakovací cvičení, které umožňuje procvičit různá jiná témata z matematiky (souřadnicové systémy, funkce, úpravy výrazů a rovnic atd.). Není ale jasné, zda by zařazení matematických spirál do středoškolské výuky za účelem procvičování bylo pro studenty dostatečně přínosné. Také je otázkou, jak moc velký prostor by jim měl být v tomto případě věnován. Na tyto otázky nelze na základě praktické části projektu jednoznačně odpovědět, pro jejich zodpovězení by bylo nutné provést komplexnější výzkum a získat více dat.

## ZDROJE

### Knižní zdroje

VORÁČKOVÁ, Šárka a kol. *Atlas geometrie: geometrie krásná a užitečná*. Praha: Academia, 2012. ISBN 978-80-200-1575-4.

### Internetové zdroje

ATLAS COPCO. *Spirálový kompresor* [online]. 26. 4. 2022 [cit. 2023-10-02]. Dostupné z: <https://www.atlascopco.com/cs-cz/compressors/wiki/compressed-air-articles/scroll-compressors>

BENEŠ, Petr. *Bio-design* [online]. Brno, 2007 [cit. 2023-09-20]. Diplomová práce. Vysoké učení technické v Brně, Fakulta výtvarných umění. Vedoucí diplomové práce PhDr. Zdeno Kolár. Dostupné z: [http://animal.ffa.vutbr.cz/~petrb/diplomka/bio-design\\_read.pdf](http://animal.ffa.vutbr.cz/~petrb/diplomka/bio-design_read.pdf)

FA ČVUT. *Spirály* [online]. 2017 [cit. 2023-09-19] Dostupné z: [https://www.fa.cvut.cz/studium/predmety/deskriptivni-geometrie-ii/dg\\_elskripta/krivky/spiraly.pdf](https://www.fa.cvut.cz/studium/predmety/deskriptivni-geometrie-ii/dg_elskripta/krivky/spiraly.pdf)

CHMELÍKOVÁ, Vlasta. *Zlatý řez* [online]. Praha, 2006 [cit. 2023-09-22]. Bakalářská práce. Univerzita Karlova v Praze, Matematicko-fyzikální fakulta. Vedoucí bakalářské práce PhDr. Alena Šarounová, CSc. Dostupné z: [https://dspace.cuni.cz/bitstream/handle/20.500.11956/5835/BPTX\\_0\\_0\\_11320\\_0\\_220508\\_0\\_43998.pdf?sequence=1&isAllowed=y](https://dspace.cuni.cz/bitstream/handle/20.500.11956/5835/BPTX_0_0_11320_0_220508_0_43998.pdf?sequence=1&isAllowed=y)

JAREŠOVÁ, Miroslava a VOLF, Ivo. *Spirály*. In: *Matematika křivek* [online]. Hradec Králové, 2007 [cit. 2023-09-18]. Dostupné z: <http://fyzikalniolympiada.cz/cd/matematika/krivky/spiraly/spiral.htm>

JAREŠOVÁ, Miroslava a ZHOUF, Jaroslav. *Spirály a jejich význam v praxi*. In: *Rozhledy matematicko-fyzikální, Vol. 84* [online]. 2009 [cit. 2023-09-18]. Dostupné z: [https://dml.cz/bitstream/handle/10338.dmlcz/146312/Rozhledy\\_084-2009-3\\_2.pdf](https://dml.cz/bitstream/handle/10338.dmlcz/146312/Rozhledy_084-2009-3_2.pdf)

KOZUBEK, Jan. *Trisekce úhlu a duplicita krychle pomocí speciálních křivek* [online]. Praha, 2014 [cit. 2023-10-02]. Bakalářská práce. Univerzita Karlova v Praze, Pedagogická fakulta. Vedoucí bakalářské práce prof. RNDr. Ladislav Kvasz, Ph.D. Dostupné z: [https://dspace.cuni.cz/bitstream/handle/20.500.11956/62132/BPTX\\_2012\\_2\\_11410\\_0\\_352608\\_0\\_134961.pdf?sequence=1&isAllowed=y](https://dspace.cuni.cz/bitstream/handle/20.500.11956/62132/BPTX_2012_2_11410_0_352608_0_134961.pdf?sequence=1&isAllowed=y)

REVENDA, Václav. *Jak funguje gramofon*. In: *Tvorba výukových www stránek pro podporu výuky multimédií* [online]. Praha, 2009 [cit. 2023-09-20]. Dostupné z: <http://www.multimedia.kvalitne.cz/multimedia/zvuk/gram1.html>

ZDEBOROVÁ, Lenka. *Květ slunečnice a Fibonacciova čísla*. In: *Rozhledy matematicko-fyzikální, Vol. 82* [online]. 2007 [cit. 2023-10-02]. Dostupné z: [https://dml.cz/bitstream/handle/10338.dmlcz/146179/Rozhledy\\_082-2007-1\\_1.pdf](https://dml.cz/bitstream/handle/10338.dmlcz/146179/Rozhledy_082-2007-1_1.pdf)



## **PŘÍLOHY**



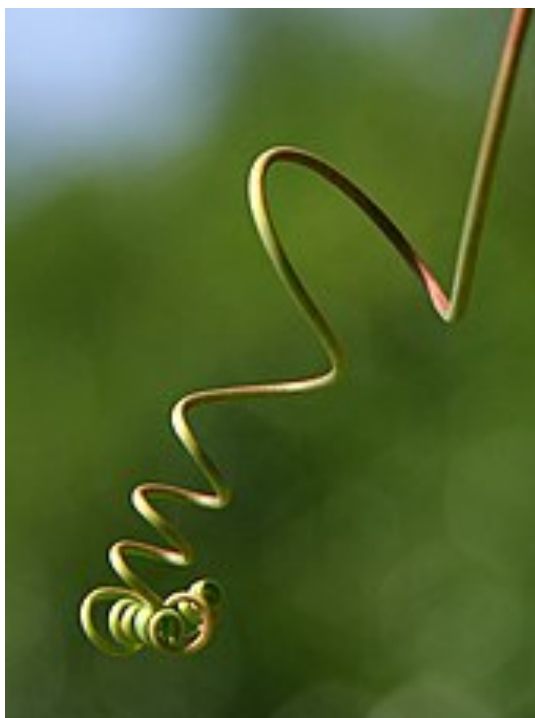
Příloha 1: Mince vyobrazující lituus (vpravo)

(Zdroj: <https://en.wikipedia.org/wiki/Lituus>)



Příloha 2: Kapradina stočená do spirály

(Zdroj: <https://optolov.ru/cs/dizajjn-dvuhkomnatnyh-kvartir/k-kakoi-gruppe-rasteni-otnositsya-paporotnik-drevnie-i-sushchestvuyushchie.html>)



Příloha 3: Úponek vinné révy

(Zdroj: <https://cs.wikipedia.org/wiki/%C3%9A\u00faponek>)

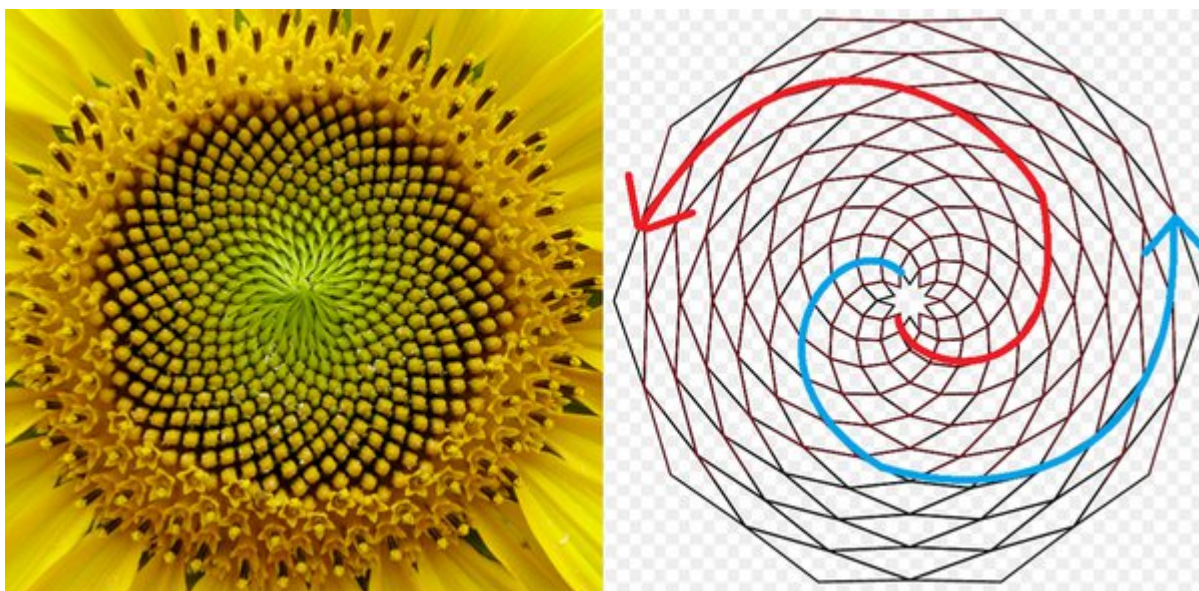


Příloha 4: Šupiny na šišce uspořádané do spirál

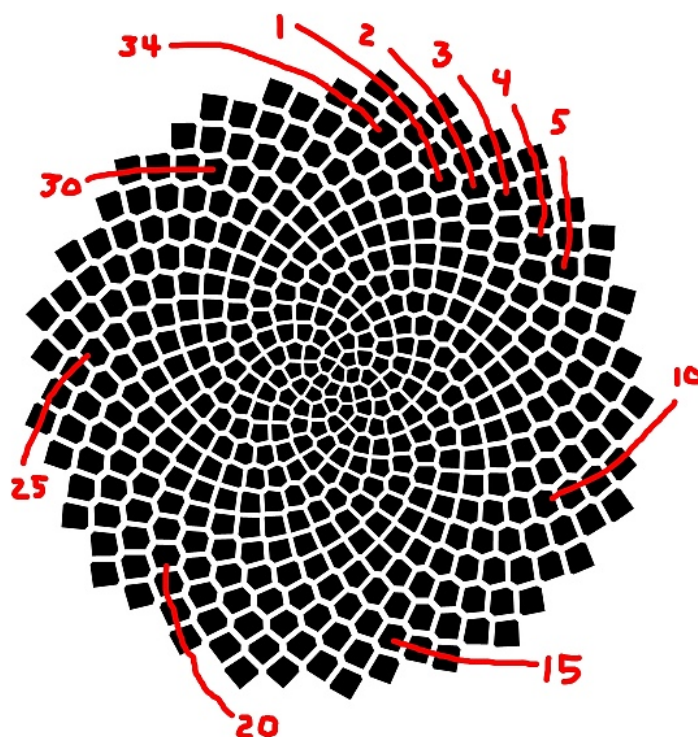
(Zdroj: <https://ladailypost.com/amateur-naturalist-the-mathematical-symmetry-of-pine-cones/>)



Příloha 5: Okvětní lístky růže uspořádané do spirály  
(Zdroj: <https://hotcore.info/babki/fibonacci-sequence-rose.html>)



Příloha 6: Květ slunečnice (vlevo) a naznačení spirálového uspořádání semen (vpravo)  
(Zdroj: <https://www.quora.com/What-are-some-applications-of-the-golden-ratio>)



Příloha 7: Naznačení počtu spirál v květu slunečnice

(Zdroj: <https://momath.org/home/fibonacci-numbers-of-sunflower-seed-spirals/>)



Příloha 8: Páskovka hajní se spirálovou ulitou

(Zdroj: <https://botany.cz/cs/cepaea-nemoralis/>)



Příloha 9: Loděnka hlubinná

(Zdroj: <https://zoomagazin.cz/zivouci-fosilie-lodenky/>)

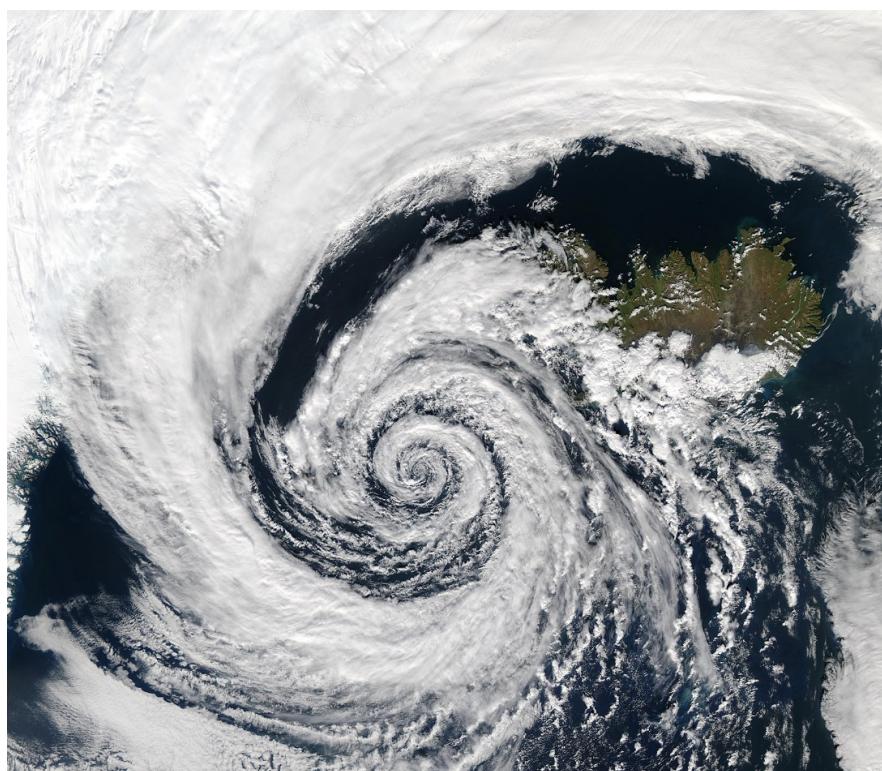


Příloha 10: Řez schránkou loděnky

(Zdroj: <https://zoomagazin.cz/zivouci-fosilie-lodenky/>)



Příloha 11: pavučina s vlákny uspořádanými do spirály  
(Zdroj: <https://www.rd.com/list/elaborate-spider-webs/>)



Příloha 12: Tlaková níže  
(Zdroj: <https://www.wikiwand.com/cs/Cykl%C3%B3na>)



Příloha 13: Spirální galaxie

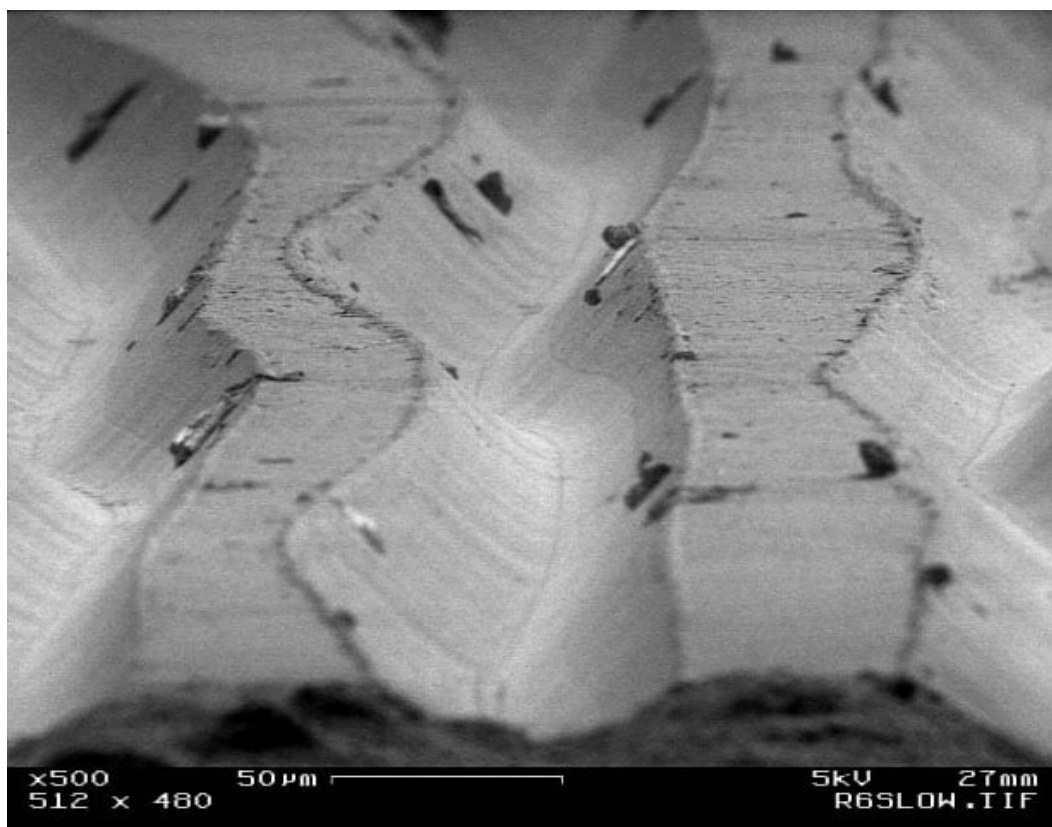
(Zdroj: <https://hvezdarna-benatky.cz/galaxie/spiralni-galaxie/>)



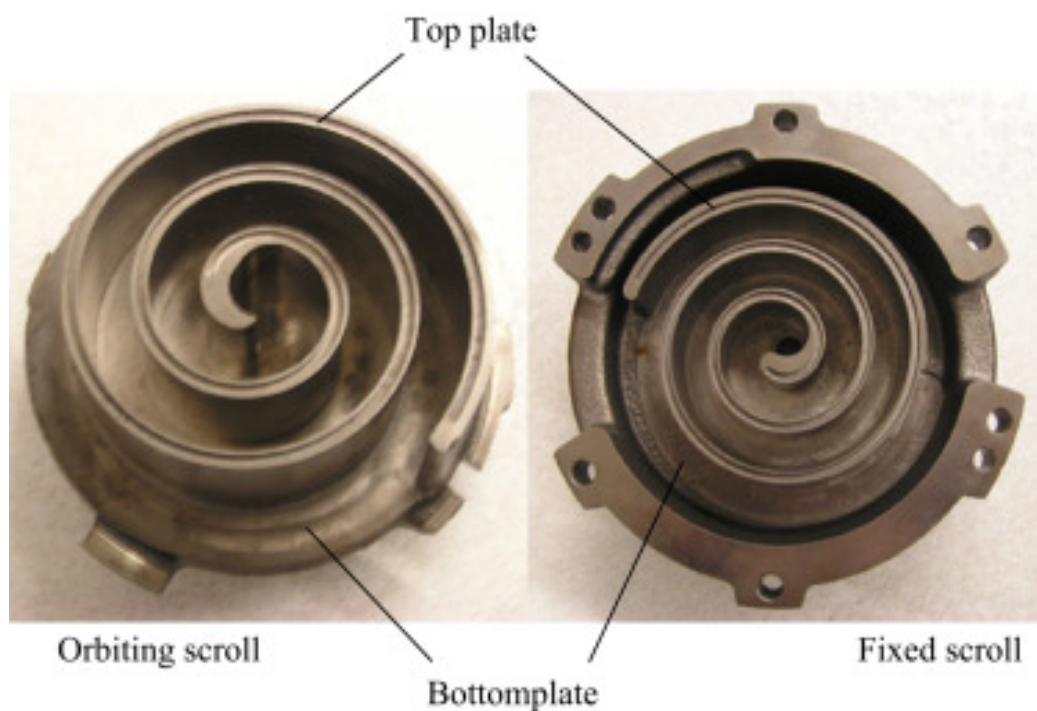
Příloha 14: Spirální galaxie s příčkou

(Zdroj: <https://www.stoplusjednicka.cz/krasa-spiralnich-galaxii-jak-vznika-galakticka-pricka>)





Příloha 15: Drážka na gramofonové desce pod mikroskopem  
(Zdroj: <https://petapixel.com/2010/03/17/vinyl-records-at-1000x-magnification/>)

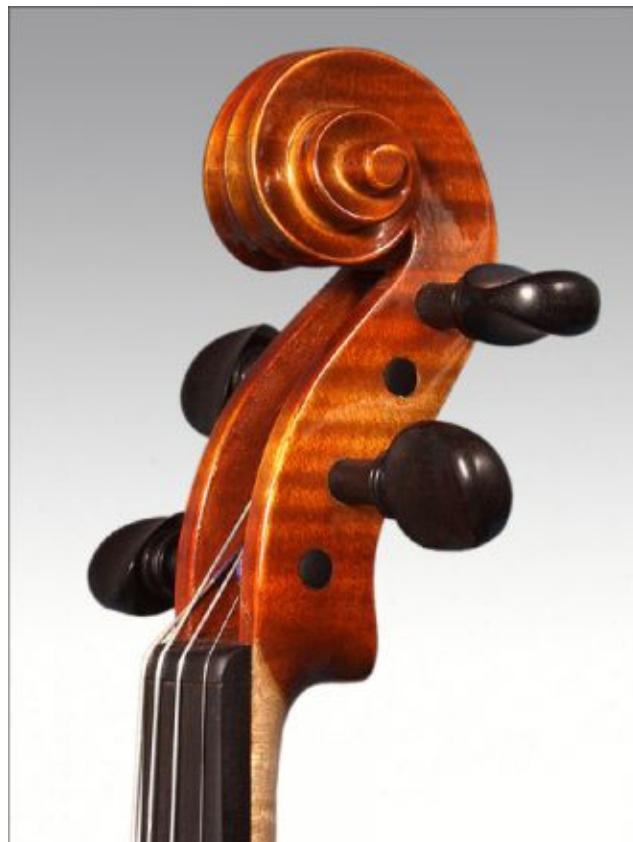


Příloha 16: Spirály uvnitř spirálového kompresoru  
(Zdroj: <https://www.sciencedirect.com/topics/materials-science/scroll-compressor>)



Příloha 17: Hlavice sloupu z antického Řecka

(Zdroj: <https://testi.cz/testy/starovek/historie-architektury-anticke-recko-a-rim/>)



Příloha 18: Krk houslí ve tvaru Lituuovy spirály

(Zdroj: <https://www.guitarpark.cz/Ars-Music-029-housle-skolni-d156.htm>)

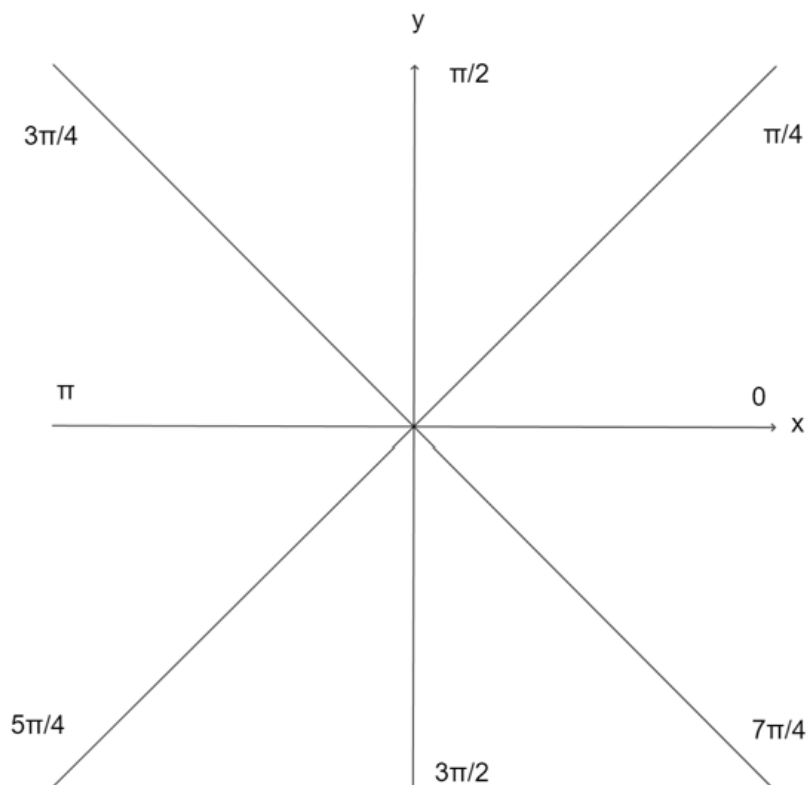


Příloha 19: Muzeum hodinek Audemars Piguet ve Švýcarsku

(Zdroj: <https://www.tdg.ch/audemars-piguet-embrauche-mais-la-branche-souffre-699309916032>)

## PRACOVNÍ LIST – MATEMATICKÉ SPIRÁLY

- I. KONSTRUKCE:** Sestrojte a následně spojte body  $M_0$  až  $M_{12}$  podle následujících instrukcí:
- 1) V tabulce pod obrázkem je seznam všech bodů; u každého je uvedena hodnota  $\Theta$  a  $r$ .
  - 2) Najděte polopřímku, která s kladnou částí osy  $x$  svírá úhel  $\Theta$ .
  - 3) Na tuto polopřímku naneste úsečku o délce  $r$ . Konec této úsečky je bod  $M$ .



**TABULKA HODNOT:**

BOD	$M_0$	$M_1$	$M_2$	$M_3$	$M_4$	$M_5$
$\Theta$	0	$\pi/4$	$\pi/2$	$3\pi/4$	$\pi$	$5\pi/4$
$r$ (cm)	0	0,5	1	1,5	2	2,5

BOD	$M_6$	$M_7$	$M_8$	$M_9$	$M_{10}$	$M_{11}$	$M_{12}$
$\Theta$	$3\pi/2$	$7\pi/4$	$2\pi$	$9\pi/4$	$5\pi/2$	$11\pi/4$	$3\pi$
$r$ (cm)	3	3,5	4	4,5	5	5,5	6

2. Vypočítejte hodnotu  $\frac{r}{\theta}$  pro následující body:

M<sub>1</sub>:  $\frac{r}{\theta} =$

M<sub>3</sub>:  $\frac{r}{\theta} =$

M<sub>2</sub>:  $\frac{r}{\theta} =$

M<sub>4</sub>:  $\frac{r}{\theta} =$

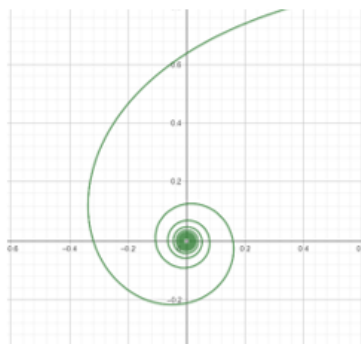
3. Doplňte větu:

Zkonstruovaná spirála je dána vztahem \_\_\_\_\_ a její pól je v bodě \_\_\_\_\_.  
Tato spirála se nazývá \_\_\_\_\_.

4. ZÁKLADNÍ TYPY SPIRÁL: K obrázkům přiřadte správné informace.

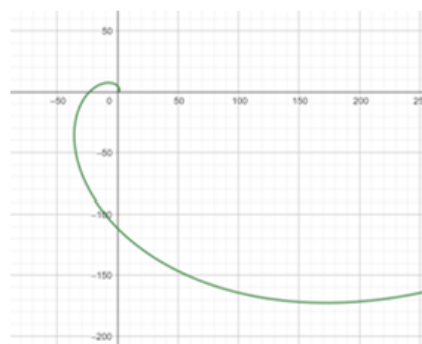
Název spirály: Fermatova, Lituuova, logaritmická, hyperbolická

Polární předpis:  $r = a\sqrt{\theta}$ ;  $r = \frac{a}{\theta}$ ;  $r = \frac{a}{\sqrt{\theta}}$ ;  $r = ae^{b\theta}$



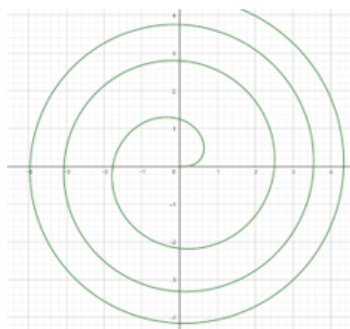
NÁZEV SPIRÁLY:

POLÁRNÍ PŘEDPIS:



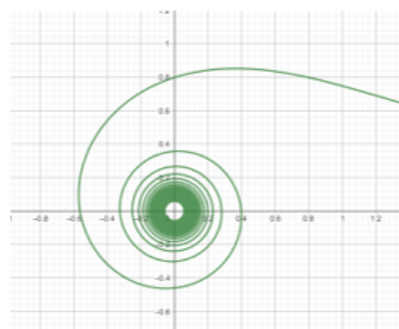
NÁZEV SPIRÁLY:

POLÁRNÍ PŘEDPIS:



NÁZEV SPIRÁLY:

POLÁRNÍ PŘEDPIS:



NÁZEV SPIRÁLY:

POLÁRNÍ PŘEDPIS:

1)



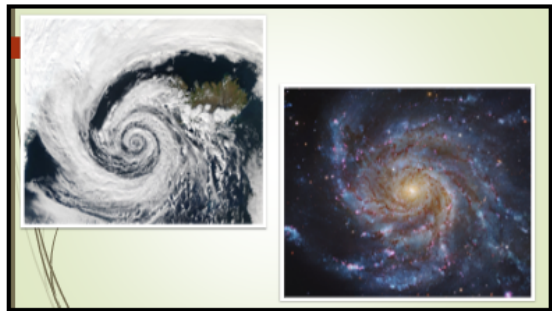
4)



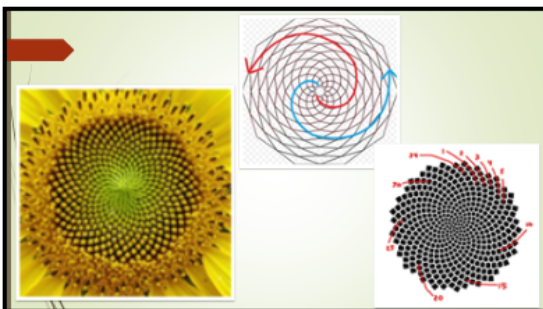
2)



5)



3)



6)



Příloha 22: Prezentace o výskytu a využití spirál (autor, 2023)

### **Zpětná vazba na výukovou hodinu o matematických spirálách**

Zpětná vazba je anonymní, odpovědi budou v projektu využity při vyhodnocování výukových hodin. U každé otázky označte právě jedno číslo (1 je nejlepší, 5 nejhorší).

1. Jak moc byl pro vás výklad srozumitelný? 1 2 3 4 5
2. Jak moc vám přišlo téma matematických spirál zajímavé? 1 2 3 4 5
3. Jak moc vám přijde toto téma přínosné (přijdou vám získané informace užitečné)? 1 2 3 4 5
4. Myslíte, že by mělo význam zařadit matematické spirály do standartních hodin matematiky na středních školách?  Ano  Ne

Děkuji za vyplnění :)